

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات

الصف الأول الثانوى   الفصل الدراسى الأول

للرياضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح   أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل   أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ كمال يونس كبشة

مراجعة

أ/ سمير محمد سعداوى   أ/ فتحى أحمد شحاتة

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

إشراف تربوى

مركز تطوير المناهج

٢٠٢٠/٢٠١٩

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركه فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تحقق من فهمك».

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.
والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الجبر والعلاقات والدوال

الوحدة الثانية: التشابه

الوحدة الثالثة: نظريات التناسب فى المثلث

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات



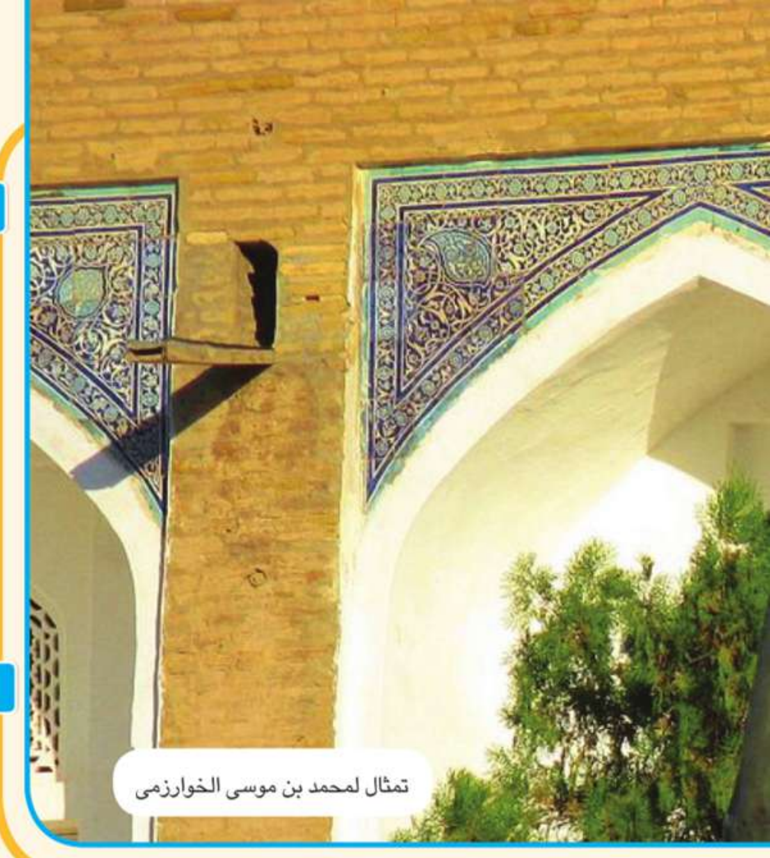
أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جَذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين).
- يحل متباينات من الدرجةالثانية فى مجهول واحد.

المصطلحات الأساسية

- معادلة Equation
- جذر المعادلة Root of the Equation
- معامل الحد Coefficient of a Term
- مميز المعادلة Discriminant of the Equation
- إشارة دالة Sign of a function
- عدد مركب Complex Number
- عدد تخيلى Imaginary Number
- قوى العدد Powers of a Number
- متباينة Inequality



تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمى

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد.

الدرس (١ - ٢): مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس (١ - ٣): تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

الدرس (١ - ٤): العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

الدرس (١ - ٥): إشارة الدالة.

الدرس (١ - ٦): متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلى - برامج رسومية - بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

نبذه تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمى (القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة العباسى المأمون) فى كتابه الذى ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذى وضع فيه طرقًا أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمى هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد تُرجْم الكتاب إلى اللغات الأوربية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

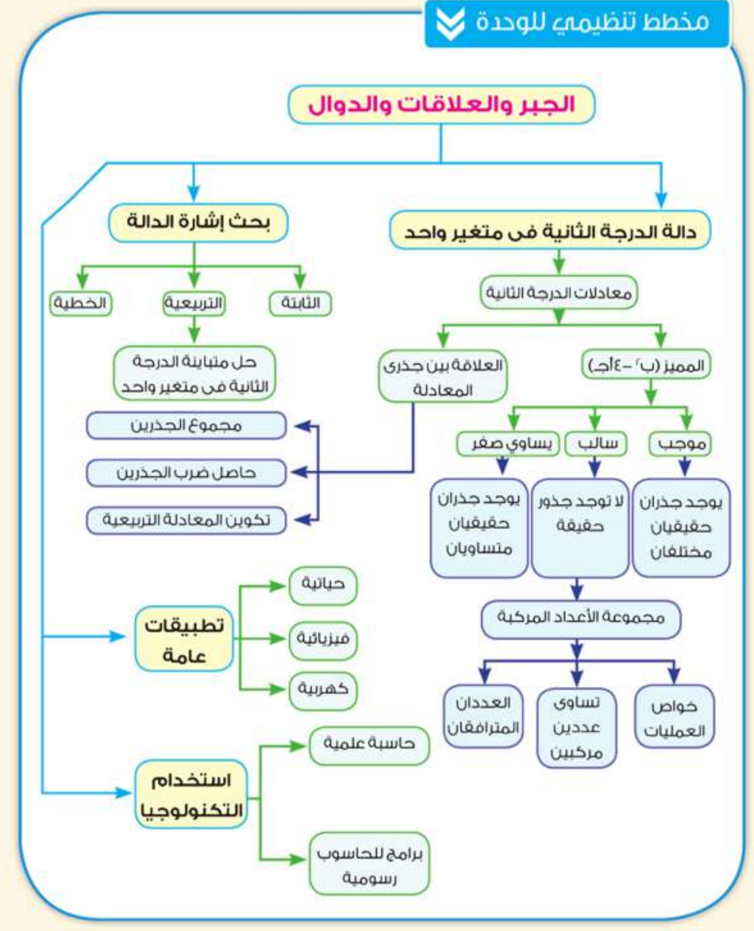
والجذر هو الذى نرمز له حاليًا بالرمز س (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمى حلولًا هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التى تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذى اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة.

وجدير بالذكر أنه ظهر فى بردية أحمس (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التى يشير حلها إلى أن المصريين فى ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حاليًا إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم - أبناءنا الطلاب- فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتى حمل علماؤنا فيها لواءَ التقدم ومشاعلَ المعرفة إلى العالم شرقًا وغربًا.

مخطط تنظيمي للوحدة



حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

١ - ١

سوف تتعلم

- مفهوم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.
- التمييز بين المعادلات والعلاقات والدوال.
- حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلة Equation
- علاقة Relation
- دالة Function
- عامل Factor
- معامل Coefficient

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق رسم بيانى

فكر و ناقش

سبق أن درست المعادلات الجبرية فى متغير واحد، وفي هذا الدرس سوف تدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

والآن سوف نستعرض ما سبق لك دراسته من المعادلات الجبرية ذات المتغير الواحد.

١- تسمى المعادلة: $أ س + ب = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ بأنها معادلة من **الدرجة الأولى فى متغير واحد هو س** (لأن أكبر قوى فيها للمتغير س هو العدد ١)

٢- تسمى المعادلة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ معادلة من **الدرجة الثانية فى متغير واحد هو س** (لأن أكبر قوى فيها للمتغير س هو العدد ٢)

وعلى ذلك فالمعادلة: $٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ = ٠$ تسمى معادلة من الدرجة الثالثة.
(لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو ٣).

المعادلات والعلاقات والدوال Equations, relations and functions

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبريًّا كالتالى، بطريقتين:

أولًا: بتحليل المقدار $أ س^{٢} + ب س + جـ$ حيث $أ، ب، جـ \in ح،$ $أ \neq ٠$
(إذا كان ذلك ممكنًا فى صـ).

ثانيًا: باستخدام القانون العام، ويكون جذرا المعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هما:

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ حيث **أ** معامل $س^{٢}$، **ب** معامل س، **جـ** الحد المطلق.

والآن سوف تدرس حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًّا.



حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً

Solving quadratic equation graphically

مثال

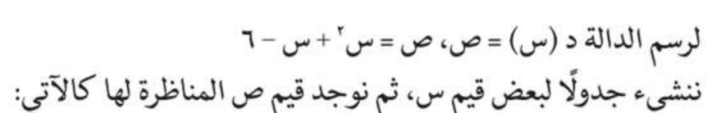
١ **حل المعادلة:** $س^{٢} + س - ٦ = ٠$ بيانيًّا، ثم تَحقَّقْ من صحة الحل.

الحل

لحل المعادلة $س^{٢} + س - ٦ = ٠$ بيانيًّا نتبع الآتي:

★ نرسم الشكل البياني للدالة د حيث $د(س) = س^{٢} + س - ٦$

> **تذكر**
>
> المقدار الثلاثى
> $أ س^{٢} + ب س + جـ$
> حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة يمكن تحليلة كحاصل ضرب كثيرتي حدود معاملاتها أعداد صحيحة إذا وفقط إذا كان المقدار $ب^{٢} - ٤ أ جـ$ مربع كامل

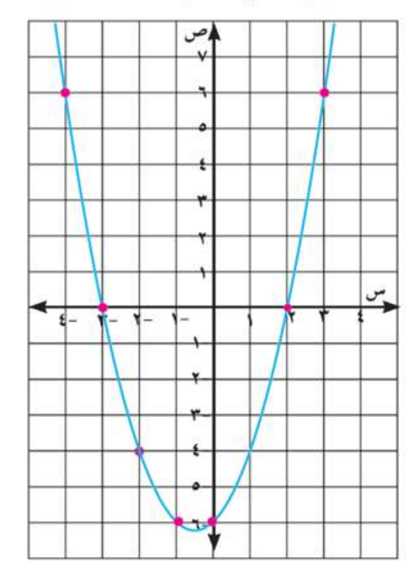


★ نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هى مجموعة حل المعادلة.

لرسم الدالة د (س) = ص، ص = س^{٢} + س − ٦

ننشىء جدولًا لبعض قيم س، ثم نوجد قيم ص المناظرة لها كالآتي:

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	−٤	−٦	−٦	−٤	٠	٦



★ نعين هذه النقاط فى المستوى الإحداثى المتعامد، ونصل بينهما بمنحنى كما فى الشكل المجاور.

ومن الرسم نجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات وهى س = − ٣، س = ٢ وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة س^{٢} + س − ٦ = ٠ هى {−٣، ٢}.

يمكنك استخدام الحل الجبرى لكى تطابقه مع الحل البيانى كالآتى:

المعادلة: س^{٢} + س − ٦ = ٠

تحليل المقدار الثلاثي: (س + ٣)(س − ٢) = ٠

إما س + ٣ = ٠ أو س − ٢ = ٠

أى س = −٣ أو س = ٢ مجموعة الحل هى {− ٣، ٢}



تذكر

إذا كان ا، ب أعدادًا حقيقية

وكان ا × ب = ٠

فإن: ا = ٠ أو ب = ٠

التحقق من صحة الحل:

عندما س = − ٣: الطرف الأيمن للمعادلة = (− ٣)^{٢} + (− ٣) − ٦

= ٩ − ٣ − ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = − ٣ تحقق المعادلة.

عندما س = ٢ : الطرف الأيمن للمعادلة = (٢)^{٢} + (٢) − ٦

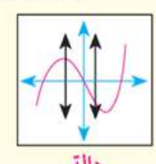
= ٤ + ٢ − ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = ٢ تحقق المعادلة.

أضف إلى معلوماتك

اختبار الخط الرأسي

Vertical line test



دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة فقط



ليست دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطتين أو أكثر

لاحظ أن:

١- فى التمثيل البيانى للعلاقة السابقة ص = س^{٢} + س − ٦

- العلاقة تمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة.
- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المدى هو [− ٦$\frac{١}{٤}$، ∞[؟

٢- للتعبير عن الدالة يستخدم الرمز د(س) بدلًا من ص، ويُقرأ دالة س.

تفكير ناقد: **١-** هل كل دالة علاقة؟ فسِّر ذلك بأمثلة.

٢- هل يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات؟ فسِّر ذلك.

حاول أن تحل

(١) مثل العلاقة ص = $س^٢$ − ٤ بيانيًا، ثم أوجد من الرسم مجموعة حل المعادلة $س^٢$ − ٤ = ٠
و إذا كانت ص = د(س) فبيِّن أنَّ د دالة، وحدِّد مجالها ومداها [ناقش معلمك].

مثال

(٢) **الربط بالفيزياء:** أُطْلِقت قذيفة رأسيًا بسرعة (ع) تُساوى ٢٤,٥ متر/ث. احسبْ الفترة الزمنية (ن) بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا، حيث (ف) تساوى ١٩,٦ مترًا، علمًا بأن العلاقة بين ف، ن كالآتى:
ف = ع ن − ٤,٩ $ن^٢$.

الحل

بالتعويض عن: ف = ١٩,٦ متر، ع = ٢٤,٥ مترًا/ ث فى العلاقة ف = ع ن − ٤,٩ $ن^٢$

∴ ١٩,٦ = ٢٤,٥ ن − ٤,٩ $ن^٢$ وبقسمة الطرفين على ٤,٩

∴ ٤ = ٥ن − $ن^٢$ بالتبسيط

∴ $ن^٢$ − ٥ن + ٤ = ٠ بتحليل المقدار الثلاثى.

∴ (ن − ١) (ن − ٤) = ٠ أى أن: ن = ١ ثانية أو ن = ٤ ثانية.

١٩,٦ متر
٢٤,٥ م/ث
نقطة القذف

تفسير وجود جوابين: القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٩,٦ مترًا بعد ثانية واحدة، ثم تستمر فى الحركة لأعلى حتى تصل لأقصى ارتفاع، ثم تعود إلى نفس الارتفاع مرة أخرى بعد ٤ ثوانٍ من لحظة إطلاقها.

حاول أن تحل

(٢) **الربط بالألعاب الرياضية:** فى إحدى الألعاب الأولمبية قفز متسابق من منصة ارتفاعها ٩,٨ أمتار عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عنها، فإذا كان ارتفاع المتسابق عن سطح الماء ف مترًا بعد زمن قدره ن ثانية يتحدد بالعلاقة:
ف = −٤,٩$ن^٢$ + ٢,٤٥ن + ٩,٨ ، فأوجد لأقرب رقمين عشريين متى يصل المتسابق لسطح الماء؟

نشاط

قم بزيارة المواقع الآتية:







تمارين (١ − ١)

أولًا: الاختيار من متعدد

(١) المعادلة: (س − ١) (س + ٢) = ٠ من الدرجة: ....

أ) الأولى ب) الثانية جـ) الثالثة د) الرابعة

(٢) مجموعة حل المعادلة $س^٢$ = س فى ح هى: ....

أ) {٠} ب) {١} جـ) {−١، ١} د) {٠، ١}

٣) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٣ = ٠ فى ح هى: ....

أ {−٣} ب {−$\sqrt{٣}$} ج {$\sqrt{٣}$} د ϕ

٤) مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٢س = −١ فى ح هى: ....

أ {−١} ب ϕ ج {−١، ١} د {١}

٥) يمثل الشكل المقابل المنحنى البيانى لدالة تربيعية د.

مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ فى ح هى: ....

أ {−٢} ب {٤}

ج ϕ د {−٢، ٤}

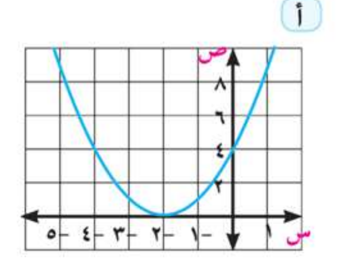
ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

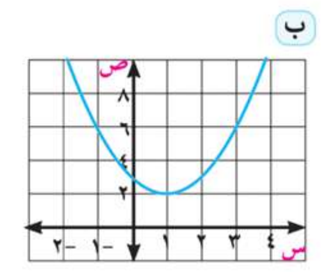
٦) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح:

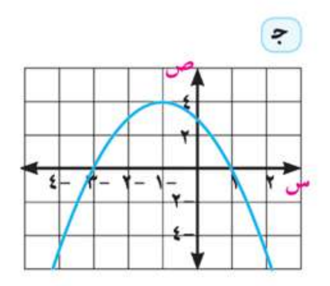
أ س^{٢} − ١ = ٠ ب س^{٢} + ٣س = ٠ ج (س − ٤)^{٢} = ٠

د س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ هـ س^{٢} + ٩ = ٠ و س (س+١) (س − ١) = ٠

٧) يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية.
أوجد مجموعة الحل للمعادلة د (س) = ٠ فى كل شكل.

أ


ب


ج


٨) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ح وحقق الناتج بيانيًا:

أ س^{٢} = ٣س + ٤٠ ب ٢س^{٢} = ٣ − ٥س

ج ٦س^{٢} = ٦ − ٥س د (س − ٣)^{٢} = ٥

هـ س^{٢} + ٢س = ١٢ و $\frac{١}{٢}$س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س = ١

٩) حل المعادلات الآتية فى ح باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

أ ٣س^{٢} − ٦٥ = ٠ ب س^{٢} − ٦س + ٧ = ٠

ج س^{٢} + ٦س + ٨ = ٠ د ٢س^{٢}+٣س−٤ = ٠

هـ ٥س^{٢} − ٣س − ١ = ٠ و ٣س^{٢} − ٦س − ٤ = ٠

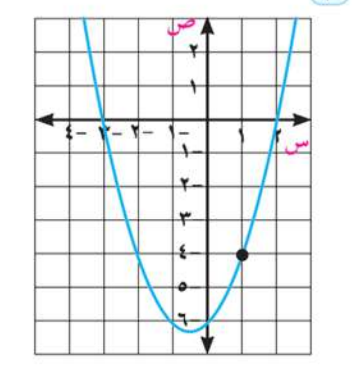
١٠ أعداد: إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا:

أ ٧٨ ب ١٧١

جـ ٢٥٣ د ٤٦٥

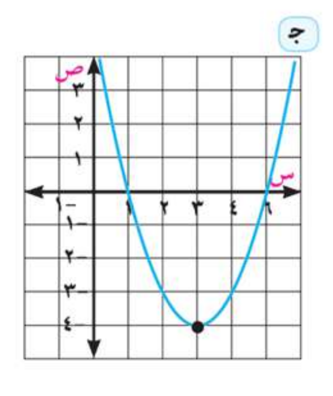
١١ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد. أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال.

أ



ب

جـ



١٢ اكتشف الخطأ: أوجد مجموعة حل المعادلة (س − ٣)^{٢} = (س − ٣).

إجابة زياد

∵ (س − ٣)^{٢} = (س − ٣)

بقسمة الطرفين على (س − ٣) حيث س ≠ ٣

∴ س − ٣ = ١ وبالتبسيط

∴ س = ٤

مجموعة الحل = {٤}

إجابة كريم

∵ (س − ٣)^{٢} = (س − ٣)

∴ (س − ٣)^{٢} − (س − ٣) = ٠

∴ (س − ٣)[(س − ٣) − ١] = ٠

بالتبسيط: س − ٣=٠ أو س − ٤=٠

مجموعة الحل = {٣، ٤}

أي الحلين صحيح؟ لماذا؟

١٣ تفكير ناقد: قُذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة (ع) تساوى ٢٩,٤ متر/ث. احسُب الفترة الزمنية (ن) بالثانية التى تستغرقها الكرة حتى تصل إلى ارتفاع (ف) مترًا، حيث ف تساوى ٣٩,٢ مترًا علمًا بأن العلاقة بين ف، ن تُعْطى كالآتى ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}.

مقدمة عن الأعداد المركبة

Complex Numbers

١ - ٢

سوف تتعلم

- مفهوم العدد التخيلي.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

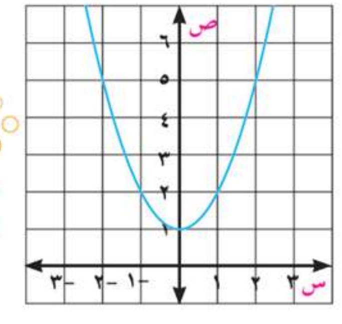
- عدد تخيلي Imaginary Number
- عدد مركب Complex Number

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست نُظمًا مختلفة للأعداد، وهى نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "ن/" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ح" ورأينا أن أى نظام ينَشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة $س^٢ = -١$ نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-١) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البيانى للدالة $ص = س^٢ + ١$ نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لايقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ حلول حقيقية.
لذا كان من الضرورى التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

تعلم

العدد التخيلى Imaginary number

يعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى (-١)

أى أن: $ت^٢ = -١$ وله الخاصية $\sqrt{-أ} = ت\sqrt{أ}$ لكل $أ \in ح^+$

وتسمى الأعداد التى على الصورة ٢ت، - ٥ت، $\sqrt{٣}$ ت **بالأعداد التخيلية**

بذلك نكتب $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}$ ت

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}$ ت وهكذا......

تفكير ناقد: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون $\sqrt{أ}\sqrt{ب} = \sqrt{أب}$؟ فسر ذلك بمثال عددى.

قوى ت الصحيحة: **Integer powers of *i***

> **لاحظ:**
> ت يرمز لها بالرمز i

العدد ت يحقق قوانين الأسس التى سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كالآتى:

$ت^{١} = ت$ $\qquad$ $ت^{٢} = -١$ $\qquad$ $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$

$ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$ $\qquad$ $ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$

وبوجه عام فإن: $ت^{٤ن} = ١$ ، $ت^{٤ن+١} = ت$ ، $ت^{٤ن+٢} = -١$ ، $ت^{٤ن+٣} = -ت$ حيث $ن \in ص$

مثال

١) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ) $ت^{٣٠}$ ب) $ت^{٤٣}$ ج) $ت^{-٦١}$ د) $ت^{٤ن+١٩}$

الحل

أ) $ت^{٣٠} = (ت^{٤})^{٧} \times ت^{٢} = ١ \times -١ = -١$

ب) $ت^{٤٣} = (ت^{٤})^{١٠} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$

ج) $ت^{-٦١} = (ت^{٤})^{-١٦} \times ت^{٣} = ١ \times ت^{٣} = ت^{٣} = -ت$

د) $ت^{٤ن+١٩} = ت^{٤ن} \times ت^{١٩} = ١ \times (ت^{٤})^{٤} \times ت^{٣} = ١ \times ت^{٣} = ت^{٣} = -ت$

حاول أن تحل

١) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

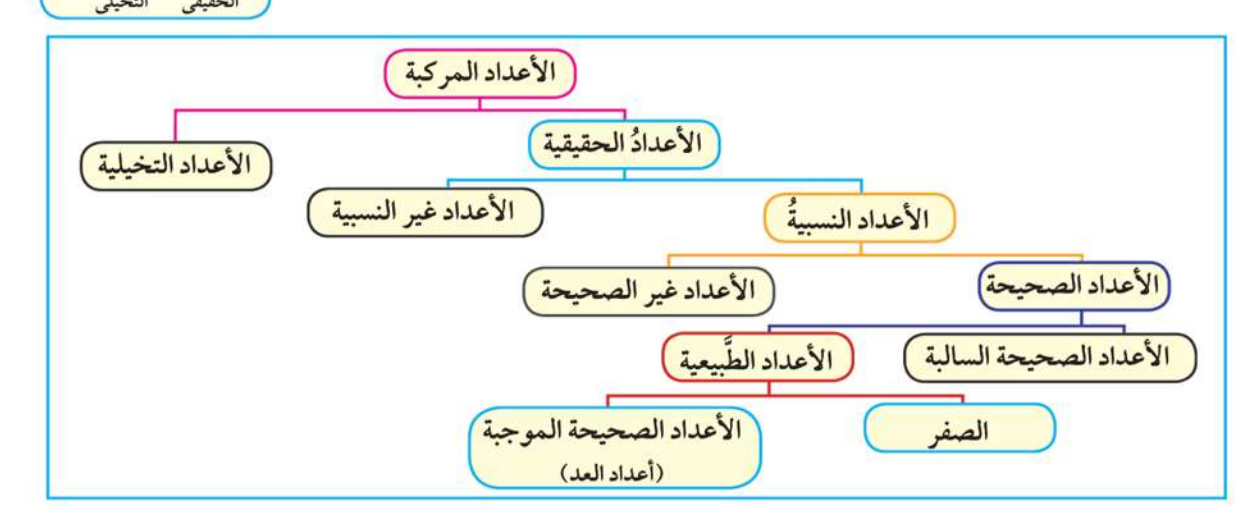
أ) $ت^{٢٤}$ ب) $ت^{٣٧}$ ج) $ت^{-٤٣}$ د) $ت^{-٥١}$ هـ) $ت^{٤ن+٢٩}$ و) $ت^{٤ن+٤٢}$

تعلم

العدد المركب Complex number

> **العدد المركب**
> أ + ب ت
> الجزء الحقيقى (أ) ، الجزء التخيلى (ب)

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت حيث أ، ب عددان حقيقيان.
ويبين الشكل التالى مجموعات الأعداد التى تُشكل جزءًا من نظام العدد المركب.



إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث ع = أ + ب ت يسمى عددًا مركبًا، وتسمى أ بالجزء الحقيقي للعدد المركب ع، ب بالجزء التخيلي للعدد المركب ع.

و إذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = أ يكون حقيقيًا، و إذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيليًا حيث ب ≠ صفر.

مثال

(٢) حل المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

الحل

المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

٩س^{٢} + ١٢٥ − ١٢٥ = ٦١ − ١٢٥ بإضافة (− ١٢٥) إلى طرفى المعادلة

٩س^{٢} = − ٦٤ بقسمة طرفى المعادلة على ٩

س^{٢} = $-\frac{٦٤}{٩}$

س = $\pm\sqrt{\frac{-٦٤}{٩}}$ بأخذ الجذر التربيعى

س = $\pm\frac{٨}{٣}$ ت تعريف العدد المركب

حاول أن تحل

(٢) حل كلًا من المعادلات الآتية:

أ ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠ ب ٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠ جـ ٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

تساوى عددين مركبين Equality of two complex numbers

يتَساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان.

إذا كان: أ + ب ت = جـ + ى ت **فإن:** أ = جـ ، ب = ى والعكس صحيح

مثال

(٣) أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان المعادلة: ٢س − ص + (س − ٢ص)ت = ٥ + ت حيث س، ص ∈ ح، ت^{٢} = −١

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

٢ س − ص = ٥ ، س − ٢ ص = ١

بحل المعادلتين ينتج أن س = ٣ ، ص = ١

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ ت ب ٢س − ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

تعلم العمليات على الأعداد المركبة Operations on complex numbers

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)   ب (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

الحل

أ المقدار = (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)

= (٧ + ٢) + (–٤ + ١) ت   باستخدام خاصيتى الإبدال والتجميع

= ٩ – ٣ ت   بالتبسيط

ب المقدار = (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

= ٢ (٣ – ٤ت) + ٣ت (٣ – ٤ت)   باستخدام خاصية التوزيع

= ٦ – ٨ت + ٩ ت – ١٢ ت^{٢} بفك الأقواس

= ٦ – ٨ت + ٩ت + ١٢   حيث ت^{٢} = – ١

= (٦ + ١٢) + (–٨ + ٩) ت = ١٨ + ت   بالتبسيط

حاول أن تحل

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (١٢ – ٥ت) – (٧ – ٩ت)   ب (٤ – ٣ت)(٤ + ٣ت)   جـ (٥ – ٦ت)(٣ + ٢ت)

العددان المترافقان Conjugate Numbers

العددان المركبان أ + ب ت ، أ – ب ت يسميان بالعددين المترافقين فمثلًا ٤ – ٣ت ، ٤ + ٣ت عددان مترافقان، حيث:

(١) (٤ – ٣ت)(٤ + ٣ت) = (٤)^{٢} – (٣ت)^{٢}

= ١٦ – ٩ت^{٢} = ١٦ – ٩(–١) = ٢٥   (الناتج عدد حقيقى)

(٢) (٤ – ٣ت) + (٤ + ٣ت) = ٨   (الناتج عدد حقيقى)

تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

مثال

⑤ أوجد قيمتى س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(٢+ت)(٢-ت)}{٣+٤ت} = س + ت\,ص$$

الحل

$\frac{٤-ت^{٢}}{٣+٤ت} = س + ت\,ص$ — بفك الأقواس

$\frac{٤+١}{٣+٤ت} \times \frac{٣-٤ت}{٣-٤ت} = س + ت\,ص$ — بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام (٣ − ٤ت)

$\frac{٥(٣-٤ت)}{٢٥} = س + ت\,ص$ — بالتبسيط

$\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت = س + ص\,ت$ — بتطبيق تساوى عددين مركبين

أى أن: $س = \frac{٣}{٥}$ ، $ص = -\frac{٤}{٥}$

حاول أن تحل

⑤ أوجد فى أبسط صورة قيمة كلٍّ مما يأتى:

أ) $\frac{٤-٦ت}{٢ت}$ ب) $\frac{٢٦}{٣-٢ت}$ ج) $\frac{٣-ت}{٢-ت}$ د) $\frac{٣+٤ت}{٥-٢ت}$

مثال

⑥ كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازي فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى ٥ − ٣ت أمبير وفى المقاومة الثانية ٢ + ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين).

الحل

∵ شدة التيار الكهربى الكلية = مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين.

∴ $= (٥ - ٣ت) + (٢ + ت)$

$= (٥ + ٢) + (-٣ + ١)\,ت$

$= ٧ - ٢ت$ أمبير

حاول أن تحل

⑥ إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى ٦ + ٤ ت أمبير، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤-ت}$، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى.

؟ تحقق من فهمك

(١) **تفكير ناقد:** أوجد فى أبسط صورة $(١ - ت)^{١٠}$



تمارين (١ - ٢)

(١) ضع كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ) $ت^{٦٦}$ ب) $ت^{-٤٥}$ ج) $ت^{٤ن + ٢}$ د) $ت^{٤ن - ١}$

(٢) بسط كلًّا مما يأتى:

أ) $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$ ب) $٣ت(-٢ت)$ ج) $(-٤ت)(-٦ت)$ د) $(-٢ت)^{٣}(-٣ت)^{٢}$

(٣) أوجد ناتج كلٍّ مما يأتى فى أبسط صورة:

أ) $(٣ + ٢ت) + (٢ - ٥ت)$ ب) $(٢٦ - ٤ت) - (٩ - ٢٠ت)$ ج) $(٢٠ + ٢٥ت) - (٩ - ٢٠ت)$

(٤) ضع كلًّا مما يأتى على صورة أ + ب ت

أ) $(٢ + ٣ت) - (١ - ٢ت)$ ب) $(١ + ٢ت^{٣})(٢ + ٣ت^{٥} + ٤ت^{٦})$

(٥) ضع كلًّا مما يأتى على صورة أ + ب ت

أ) $\frac{٢}{١ + ت}$ ب) $\frac{٤ + ت}{ت}$ ج) $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$ د) $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ت}$

(٦) حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٣س^{٢} + ١٢ = ٠$ ب) $٤ص^{٢} + ٢٠ = ٠$ ج) $٤ع^{٢} + ٧٢ = ٠$ د) $\frac{٣}{٥}ص^{٢} + ١٥ = ٠$

(٧) **كهرباء:** أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربائية مغلقة إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى $٤ - ٢ت$ أمبير، وفى المقاومة الثانية $\frac{٦ + ٣ت}{٢ + ت}$ أمبير ....

(٨) **اكتشف الخطأ:** أوجد أبسط صورة للمقدار: $(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ - ٣ت)$

إجابة أحمد

$(٢ + ٣ت)(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت)$

$= (٢ + ٣ت)(٤ - ٩ت^{٢})$

$= (٢ + ٣ت)(٤ + ٩) = ١٣(٢ + ٣ت)$

$= ٢٦ + ٣٩ت$

إجابة كريم

$(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ - ٣ت) = (٤ + ٩ت^{٢})(٢ - ٣ت)$

$= (٤ - ٩)(٢ - ٣ت) = -٥(٢ - ٣ت)$

$= -١٠ + ١٥ت$

أى الحلين صحيح؟ لماذا؟ ....

١ - ٣

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

سوف تتعلم

- كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذر Root
- مميز Discriminant

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلًّا وحيدًا مكررًا، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟

تعلم

المميز Discriminant

جذرا المعادلة التربيعية $أس^2 + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$، أ، ب، جـ $\in$ ع

هما: $\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^2 - ٤أجـ}$.

يسمى المقدار $ب^2 - ٤أجـ$ مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

مثال

١ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

أ) $٥س^2 + س - ٧ = ٠$ ب) $س^2 - ٢س + ١ = ٠$

جـ) $- س^2 + ٥س - ٣٠ = ٠$

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

أ) أ = ٥ ، ب = ١ ، جـ = -٧

المميز = $ب^2 - ٤أجـ$

$= ١ - ٤ \times ٥ (-٧) = ١٤١$

$\because$ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ب) أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ١

المميز = $ب^2 - ٤أ جـ$

$= ٤ - ٤ \times ١ \times ١ = ٠$

$\because$ المميز يساوى صفرًا، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

ج) أ = -١ ، ب = ٥ ، جـ = -٣٠ المميز = $ب^٢$ - ٤أجـ

= ٢٥ - ٤ × -١ × -٣٠ = -٩٥

∵ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطي للدالة المرتبطة بالمعادلة
($ب^٢$ - ٤أجـ) > ٠	جذران حقيقيان مختلفان	
$ب^٢$ - ٤أجـ = ٠	جذر حقيقي واحد مكرر (جذران متساويان)	
$ب^٢$ - ٤أجـ < ٠	جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).	

حاول أن تحل

(١) عيِّن نوع جذري كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

أ) ٦$س^٢$ = ١٩ س - ١٥ ب) ١٢س - ٤$س^٢$ = ٩

ج) س (س - ٢) = ٥ د) س(س + ٥) = ٢(س - ٧)

مثال

(٢) أثبت أن جذري المعادلة ٢$س^٢$ - ٣ س + ٢ = ٠ مركبان و غير حقيقيين، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

أ = ٢، ب = -٣، جـ = ٢

∵ المميز = $ب^٢$ - ٤أجـ ∴ المميز = $(-٣)^٢$ - ٤ × ٢ × ٢ = ٩ - ١٦ = -٧

∵ المميز سالب ∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين).

القانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{٧ت^٢}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,ت}{٤}$

جذرا المعادلة هما: $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ت

تفكير ناقد: هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٧س^{٢} – ١١ س + ٥ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

(٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢(ك – ١) س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

ب^{٢} – ٤أجـ = ٠

٤(ك – ١)^{٢} – ٤ × ١ × ٩ = ٠

٤ك^{٢} – ٨ك – ٣٢ = ٠

ك^{٢} – ٢ك – ٨ = ٠

(ك – ٤)(ك + ٢) = ٠

ك = ٤ أو ك = –٢

التحقيق: عندما ك = ٤

تصبح المعادلة: س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: –٣، –٣

التحقيق: عندما ك = –٢

تصبح المعادلة: س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: ٣،٣

حاول أن تحل

(٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢}– ٢ك س + ٧ك – ٦س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.



تمارين (١ – ٣)

أولًا: اختيار من متعدد:

(١) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٤س + ك = ٠ متساويين إذا كانت: ....

أ) ك = ١   ب) ك = ٤   ج) ك = ٨   د) ك = ١٦

(٢) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٢س + م = ٠ حقيقيين مختلفين إذا كانت: ....

أ) م = ١   ب) م > ١   ج) م < ١   د) م = ٤

(٣) يكون جذرا المعادلة ل س^{٢} – ١٢س + ٩ = ٠ مركبين غير حقيقيين إذا كانت: ....

أ) ل < ٤   ب) ل > ٤   ج) ل = ٤   د) ل = ١

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:

أ) س^{٢} – ٢س + ٥ = ٠   ب) ٣س^{٢} + ١٠س – ٤ = ٠

ج) س^{٢} – ١٠س + ٢٥ = ٠   د) ٦س^{٢} – ١٩س + ٣٥ = ٠

هـ) (س – ١١) – س(س – ٦) = ٠   و) (س – ١) (س – ٧) = ٢ (س – ٣) (س – ٤)

٥ أوجد حل كلٍّ من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام.

أ س^{٢} − ٤س + ٥ = ٠ ب ٢س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠

جـ ٣س^{٢} − ٧س + ٦ = ٠ د ٤س^{٢} − س + ١ = ٠

٦ أوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٤س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين.

ب إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٣س + ٢ + $\frac{١}{ك}$ = ٠ متساويين.

جـ إذا كان جذرا المعادلة ك س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠ مركبين غير حقيقيين.

٧ إذا كان ل، م عددين نسبيين، فأثبت أن جذرى المعادلة : ل س^{٢} + (ل − م) س − م = ٠ عددان نسبيان.

٨ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة:

ع = ن^{٢} + ١,٢ ن + ٩١ حيث (ع) عدد السكان بالمليون، (ن) عدد السنوات

أ كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣؟ ....

ب قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣ ....

جـ قدر عدد السنوات التى يبلغ عدد السكان فيها ٣٣٤ مليونًا. ....

د اكتب مقالًا توضح فيه أسباب الزيادة المطردة فى عدد السكان وكيفية علاجها.

٩ اكتشف الخطأ: ما عدد حلول المعادلة ٢س^{٢} − ٦ س = ٥ فى ح

إجابة أحمد

ب^{٢} − ٤P جـ = (−٦)^{٢} − ٤ × ٢ × ٥

= ٣٦ − ٤٠ = −٤

المميز سالب، فلا توجد حلول حقيقية

إجابة كريم

ب^{٢} − ٤P جـ = (−٦)^{٢} − ٤ × ٢ (−٥)

= ٣٦ + ٤٠ = ٧٦

المميز موجب، فيوجد حلَّان حقيقيان مختلفان

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢ (ك - ١) س + (٢ك + ١) =٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذريين.

١١ تفكير ناقد: حل المعادلة ٣٦ س^{٢} − ٤٨ س + ٢٥ = ٠ فى مجموعة الأعداد المركبة.

١ - ٤ العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مجموع جذرين Sum of Two Roots
- حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



نعلم أن جذرى المعادلة ٤س^{٢} – ٨س + ٣ = ٠ هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$

مجموع الجذرين $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = \frac{١+٣}{٢} = ٢$

حاصل ضرب الجذرين $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٤}$

هل توجد علاقة بين مجموع جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

تعلم

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sum and multiply of two roots

جذرا المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما:

$\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثانى = م فإن:

ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ (أثبت ذلك) ل م = $\frac{جـ}{أ}$ (أثبت ذلك)

تعبير شفهى فى المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

أوجد ل + م ، ل م فى الحالات الآتية:

(أ) إذا كان أ = ١ (ب) إذا كانت ب = أ (جـ) إذا كان أ = جـ

مثال

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة:

٢س^{٢} + ٥ س – ١٢ = ٠

الحل

أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = –١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢} = -\frac{٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

حاول أن تحل

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

أ $٢ س^٢ + س - ٦ = ٠$ ب $٣ س^٢ = ٢٣ س - ٣٠$ جـ $(٢س - ٣) (س + ٢) = ٠$

مثال

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٢ س^٢ - ٣ س + ك = ٠$ يساوى ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة.

الحل

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ $\frac{ك}{٢} = ١$ ∴ ك = ٢

أ = ٢، ب = - ٣، جـ = ٢

القانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧ت^٢}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}ت}{٤}$

مجموعة حل المعادلة هى $\{\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}ت ، \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}ت\}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٣س^٢ + ١٠س - جـ = ٠$ هو $\frac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ، ثم حل المعادلة.

(٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة $٢ س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ هو $-\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

مثال

(٣) إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة $س^٢ - ٢ س + أ = ٠$ حيث أ ∈ ع فأوجد:

أ الجذر الآخر ب قيمة أ

الحل

أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = أ

أ ∵ ١ + ت هو أحد جذرى المعادلة

∴ الجذر الآخر = ١ - ت لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما = ٢

ب ∵ حاصل ضرب الجذرين = أ

∴ (١ + ت) (١ - ت) = أ

∴ ١ + ١ = أ ∴ أ = ٢

حاول أن تحل

(٤) إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة $س^٢ - ٤ س + ب = ٠$ حيث ب ∈ ع فأوجد

أ الجذر الآخر. ب قيمة ب



تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠

بقسمة طرفى المعادلة على أ: ∴ س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

أى س^{٢} - $(\frac{-ب}{أ})$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

∵ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ، ل + م = - $\frac{ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$

∴ المعادلة التربيعية التى جذراها ل،م هى: **س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠**

مثال

(٤) كون المعادلة التربيعية التى جذراها ٤، -٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

∵ ل + م = ٤ + (- ٣) = ١، ل م = ٤ (- ٣) = - ١٢، ∵ صيغة المعادلة التربيعية هى: س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠

∴ المعادلة هى: س^{٢} - س - ١٢ = ٠

مثال

(٥) كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها: $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{-٢-٤ت}{٢-ت}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

ل = $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ × $\frac{١ - ت}{١ - ت}$ = $\frac{٤ ت}{٢}$ = **٢ت**

م = $\frac{-٢-٤ت}{٢-ت}$ × $\frac{٢ + ت}{٢ + ت}$ = $\frac{- ١٠ ت}{٥}$ = **- ٢ ت**

ل + م = ٢ ت - ٢ ت = ٠

، ل م = ٢ ت × - ٢ ت = - ٤ت^{٢} = ٤

∵ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م : س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠

∴ س^{٢} + ٤ = ٠

حاول أن تحل

(٥) كوِّن المعادلة التربيعية فى كل مما يأتى بمعلومية جذريها:

أ ٣ ، -٥ ب -٩ ت ، ٩ ت ج $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

تفكير ناقد: الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التى يمر كل منها بالنقطتين (٠، -٢) ، (٠، ٢).
أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال



تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation



مثال

(٦) إذا كان ل، م جذرى المعادلة $٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$ فكون المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^٢$، $م^٢$.



الحل

المعادلة المعلومة بالتعويض عن أ = ٢، ب = -٣، جـ = -١: $ل + م = -\frac{-٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$، $ل م = -\frac{١}{٢}$

المعادلة المطلوبة بالتعويض عن $ل + م = \frac{٣}{٢}$، $ل م = -\frac{١}{٢}$ فى الصيغة $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

$\therefore ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = (\frac{٣}{٢})^٢ - ٢ \times (-\frac{١}{٢})$

$= \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{٩}{٤} + \frac{٤}{٤} = \frac{١٣}{٤}$

لاحظ أن

$ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

$(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م$

$\because ل^٢م^٢ = (ل م)^٢$

$\therefore ل^٢م^٢ = (-\frac{١}{٢})^٢ = \frac{١}{٤}$

بالتعويض فى صيغة المعادلة التربيعية: $س^٢ -$ (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

$س^٢ - \frac{١٣}{٤} س + \frac{١}{٤} = ٠$ بضرب طرفى المعادلة فى ٤

$\therefore$ المعادلة التربيعية المطلوبة هى: $٤ س^٢ - ١٣ س + ٤ = ٠$

حاول أن تحل

(٦) فى المعادلة السابقة $٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$ كوّن المعادلات التربيعية التى جذرا كل منها كالآتى:

(أ) $\frac{١}{ل}$، $\frac{١}{م}$ (ب) $\frac{ل}{م}$، $\frac{م}{ل}$ (جـ) ل + م ، ل م

تحقق من فهمك

(١) فى كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التى جذراها:

(أ) $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٤}{٣}$ (ب) $٥\sqrt{٣}$، $-٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٣ + \sqrt{٢}$ ت ، $٣ - \sqrt{٢}$ ت

(٢) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$ فكوّن المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^٢$، $م^٢$.



أولًا: أكمل ماياتى:

(١) إذا كان س = ٣ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + م س – ٢٧ = ٠ فإن م = ...، الجذر الآخر = ...

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ٧ س + ٣ ك = ٠ يساوى مجموع جذرى المعادلة:
س^{٢} – (ك + ٤) س = ٠ فإن ك = ...

(٣) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذرى المعادلة س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ هى ....

(٤) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذرى المعادلة س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠ هى ....

ثانيًا: الاختيار من متعدد

(٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} – ٣ س + جـ = ٠ ضعف الآخر فإن جـ تساوى ....

أ -٤ ب -٢ جـ ٢ د ٤

(٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} – ٣س+ ٢ =٠ معكوسًا ضربيًّا للآخر، فإن أ تساوى ....

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ ٢ د ٣

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢}– (ب – ٣) س + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًّا للآخر، فإن ب تساوى ....

أ -٥ ب -٣ جـ ٣ د ٥

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(٨) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل معادلة فيما يأتى:

أ ٣ س^{٢} + ١٩ س – ١٤ = ٠ ب ٤ س^{٢} + ٤ س – ٣٥ = ٠

....

(٩) أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة فى كل مما يأتى:

أ إذا كان: س = – ١ أحد جذرى المعادلة س^{٢} – ٢ س + أ = ٠ ....

ب إذا كان: س = ٢ أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} – ٥ س + أ = ٠ ....

(١٠) أوجد قيمة أ، ب فى كل من المعادلات الآتية إذا كان:

أ ٢، ٥ جذرا المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ ....

ب -٣، ٧ جذرا المعادلة أس^{٢} – ب س - ٢١ = ٠ ....

جـ -١، $\frac{٣}{٢}$ جذرا المعادلة أ س^{٢} – س + ب = ٠ ....

د $\sqrt{٣}$ ت ، - $\sqrt{٣}$ ت جذرا المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ ....

(١١) ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية، ثم أوجد مجموعة حل كل منها:

(أ) س^{٢} + ٢س – ٣٥ = ٠

(ب) ٢س^{٢} + ٣س + ٧ = ٠

(ج) س(س – ٤) + ٥ = ٠

(د) ٣س(٣س – ٨) + ١٦ = ٠

(١٢) أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة جـ س^{٢} – ١٢س + ٩ = ٠ متساويين.

(١٣) أوجد قيمة أ التى تجعل جذرى المعادلة س^{٢} – ٣س + ٢ + $\frac{١}{أ}$ = ٠ متساويين.

(١٤) أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة ٣ س^{٢} – ٥ س + جـ = ٠ متساويين، ثم أوجد الجذرين.

(١٥) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة س^{٢} + (ك – ١) س – ٣ = ٠ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

(١٦) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ ك س^{٢} + ٧ س + ك^{٢} + ٤ = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(١٧) كون معادلة الدرجة الثانية التى جذراها كالآتى :

(أ) – ٢، ٤

(ب) – ٥ ت، ٥ ت

(ج) $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٣}{٢}$

(د) ١ - ٣ت ، ١ + ٣ت

(هـ) ٣ - ٢$\sqrt{٢}$ ت ، ٣ + ٢$\sqrt{٢}$ ت

(١٨) أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ضعفا جذرى المعادلة ٢س^{٢} – ٨س + ٥ = ٠

(١٩) أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة : س^{٢} – ٧س – ٩ = ٠

(٢٠) أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة : س^{٢} + ٣س – ٥ = ٠

(٢١) إذا كان ل، م جذرى المعادلة س^{٢} – ٧ س + ٣ = ٠ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التى جذراها:

(أ) ٢ ل، ٢ م

(ب) ل + ٢، م + ٢

(ج) $\frac{٢}{ل}$، $\frac{٢}{م}$

(د) ل + م، ل م

٢٢ **مساحات:** قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦، ٩ من الأمتار، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بعد من أبعادها بنفس المقدار. أوجد المقدار المضاف.

....

....

٢٣ **تفكير ناقد:** أوجد مجموعة قيم جـ فى المعادلة التربيعية ٧ س^{٢} + ١٤ س + جـ = ٠ بحيث يكون للمعادلة:

أ) جذران حقيقيان مختلفان.

ب) جذران حقيقيان متساويان.

جـ) جذران مركبان.

....

....

....

....

٢٤ **اكتشف الخطأ:** إذا كان ل + ١، م + ١ هما جذرا المعادلة س^{٢} + ٥س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ل، م.

حل يوسف

∵ (ل + ١) + (م+١) = −٥

∴ ل + م + ٢ = −٥ ∴ ل + م = −٧،

∵ (ل + ١)(م + ١) = ٣ ∴ ل م + (ل + م) + ١ = ٣

∴ ل م − ٧ + ١ = ٣ ∴ ل م = ٩

المعادلة هى: س^{٢} + ٧س + ٩ = ٠

حل أميرة

∵ ل + م = −٥، ل م = ٣

∴ (ل+١) + (م + ١) = ل+ م + ٢

= −٥ + ٢ = −٣،

∵ (ل+١)(م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= ٣ − ٣ + ١ = ١

المعادلة هى: س^{٢} + ٣س + ١ = ٠

....

....

....

....

٢٥ **تفكير ناقد:** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة س^{٢} + ك س + ٢ك = ٠ يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} + ٣ س + ك = ٠ فأوجد ك.

....

....

١ - ٥ إشارة الدالة

Sign of the Function

سوف تتعلم

- بحث إشارة كل من: الدالة الثابتة - دالة الدرجة الأولى - دالة الدرجة الثانية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



سبق أن درست التمثيل البيانى لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟
المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير س (مجال س) التى تكون عندها قيم الدالة د على النحو الآتى:

موجبة، أى د(س) > ٠

سالبة، أى د(س) < ٠

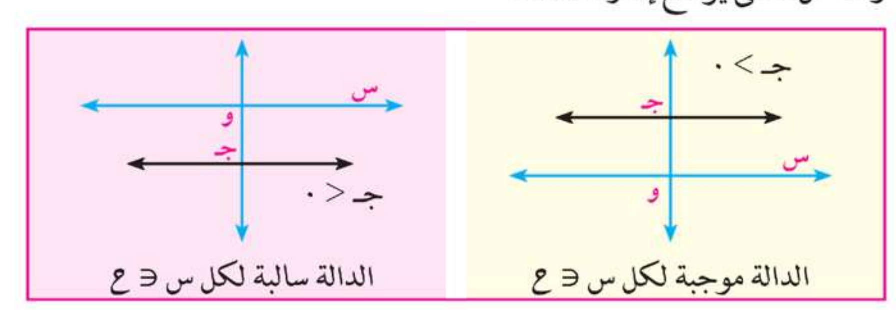
مساوية للصفر د(س) = ٠



أولا: إشارة الدالة الثابتة First: The sign of the Constant Function



إشارة الدالة الثابتة د حيث د(س) = جـ (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.
والشكل التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٥ ب) د(س) = -٧

الحل

أ) ∵ د(س) > ٠ ∴ إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع

ب) ∵ د(س) < ٠ ∴ إشارة الدالة سالبة لكل س ∈ ع

حاول أن تحل

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

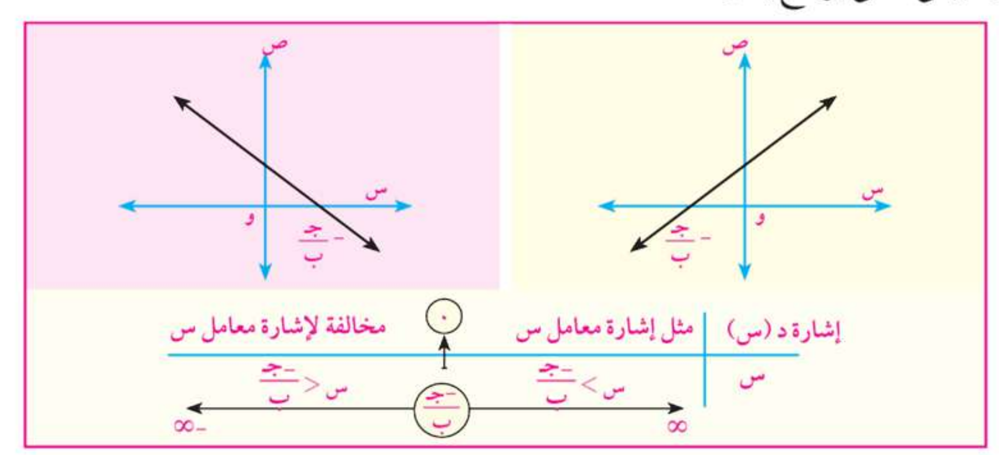
أ) د(س) = $-\frac{٢}{٣}$ ب) د(س) = $\frac{٥}{٢}$

ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

Second: Sign of the Linear Function

قاعدة الدالة د هى د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠ ، س = $-\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠

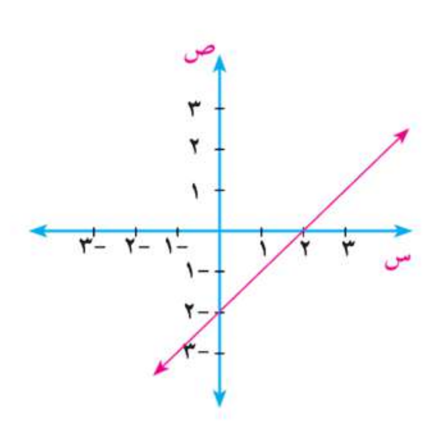
والشكل البيانى التالى يوضح إشارة الدالة د.





(٢) عين إشارة الدالة د حيث د(س) = س – ٢ مع توضيح ذلك بيانيًا:

الحل



قاعدة الدالة: د(س) = س – ٢

رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠   فإن س = ٢

عندما س = ٠   فإن د(س) = – ٢

من الرسم نجد أن:

- الدالة موجبة عندما س > ٢
- الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢
- الدالة سالبة عندما س < ٢

حاول أن تحل

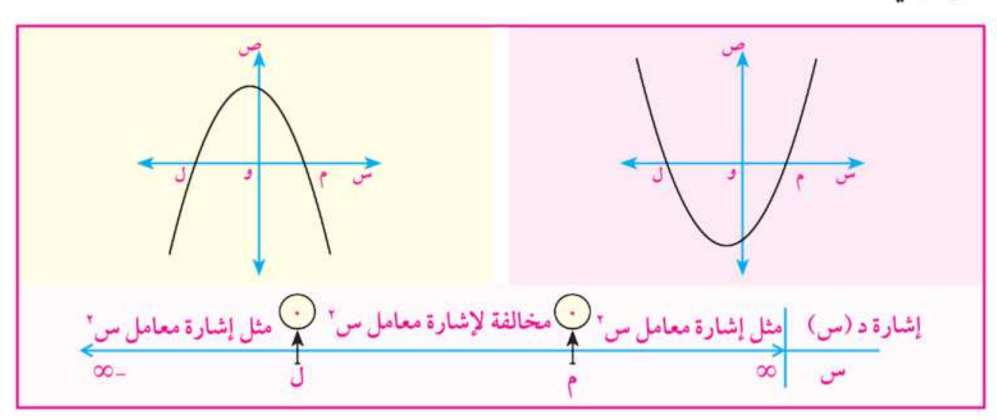
(٢) عين إشارة الدالة د(س) = – ٢س – ٤ مع توضيح ذلك بيانيًا.

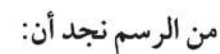
ثالثًا: إشارة الدالة التربيعية — Third: Sign of the Quadratic Function.

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

نوجد مميز المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإذا كان:

أولًا: ب^{٢} – ٤أ جـ > ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن ل < م تكون إشارة الدالة كما فى الأشكال الآتية:





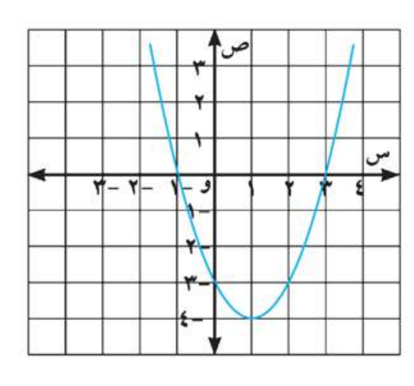
(٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} – ٢ س – ٣ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة: س^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠

(س – ٣) (س + ١) = ٠

فيكون جذرا المعادلة: -١، ٣



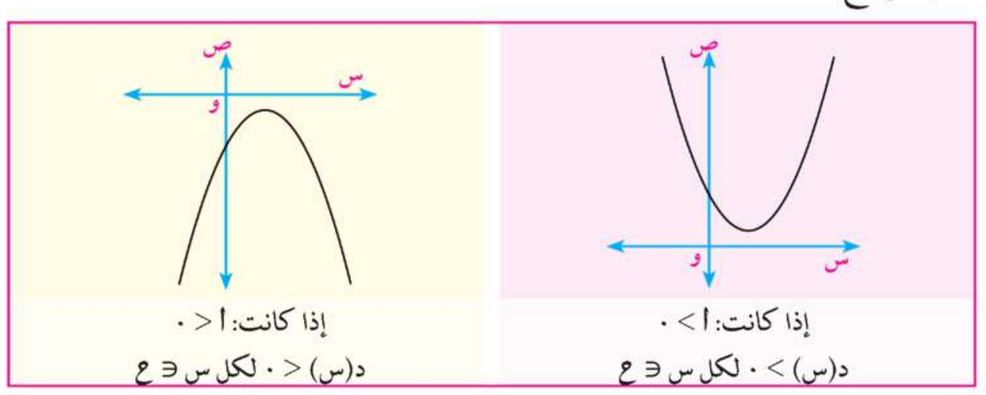
من الرسم نجد أن:

- د(س) > ٠ عندما س ∈ ح – [-١، ٣]
- د(س) < ٠ عندما س ∈]-١، ٣[
- د(س) = ٠ عندما س ∈ {-١، ٣}

حاول أن تحل

(٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} – س + ٦ ثم عين إشارة الدالة د.

ثانيًا: إذا كان: ب^{٢} – ٤أ جـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س^{٢}، والأشكال التالية توضح ذلك.



إذا كانت: أ > ٠
د(س) > ٠ لكل س ∈ ع

إذا كانت: أ < ٠
د(س) < ٠ لكل س ∈ ع

مثال

٤ مثل بيانيًّا د حيث د(س) = س^{٢} – ٤س + ٥ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب^{٢} – ٤ أ جـ) = (–٤)^{٢} – ٤ × ١ × ٥

= ١٦ – ٢٠ = –٤ < ٠

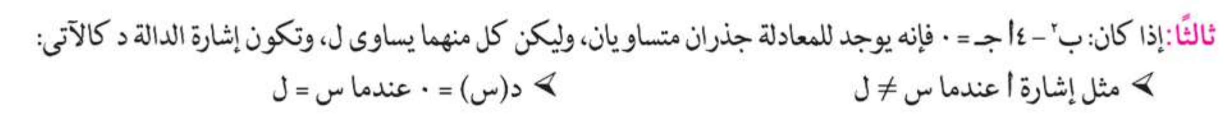
لذلك فإن المعادلة س^{٢} – ٤س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع (لأن معامل س^{٢} > ٠)



حاول أن تحل

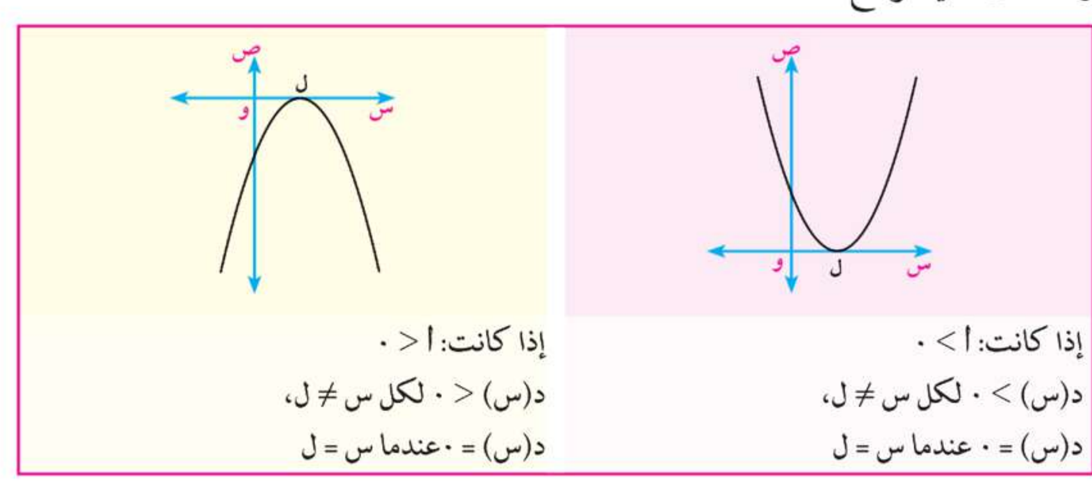
٤ مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = – س^{٢} – ٢س – ٤ ثم عين إشارة الدالة د.



ثالثًا: إذا كان: ب^{٢} – ٤أ جـ = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى:

- مثل إشارة أ عندما س ≠ ل
- د(س) = ٠ عندما س = ل

والأشكال الآتية توضح ذلك.



إذا كانت: أ > ٠
د(س) > ٠ لكل س ≠ ل،
د(س) = ٠ عندما س = ل

إذا كانت: أ < ٠
د(س) < ٠ لكل س ≠ ل،
د(س) = ٠ عندما س = ل

مثال

(٥) مثل بيانيًا د حيث د(س) = ٤ س^{٢} − ٤س + ١ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب^{٢} − ٤ أ جـ) = (−٤)^{٢} − ٤ × ٤ × ١

= ١٦ − ١٦ = ٠

لذلك فإن المعادلة ٤ س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ لها جذران متساويان.

بالتحليل: (٢س − ١)^{٢} = ٠

بوضع: ٢س − ١ = ٠ تكون س = $\frac{١}{٢}$

د(س) > ٠ عندما س ≠ $\frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

(٥) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = − ٤ س^{٢} − ١٢س − ٩ ثم عين إشارة الدالة د.

مثال

(٦) اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ع يكون جذرا المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك −٣ = صفر حقيقيين مختلفين

الحل

المميز (ب^{٢} − ٤أجـ) = (−ك)^{٢} − ٤ × ٢ × (ك − ٣) = ك^{٢} − ٨ك +٢٤

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

نبحث إشارة المقدار ص = ك^{٢} − ٨ك +٢٤

فيكون مميز المعادلة ك^{٢} − ٨ك + ٢٤ = ٠ هو:

(−٨)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٤ = ٦٤ − ٩٦ = −٣٢ < ٠

لذلك فإن المعادلة ك^{٢} − ٨ك +٢٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة المقدار ص = ك^{٢} − ٨ك +٢٤ موجبة لكل س ∈ ع (لماذا)؟

فيكون مميز المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك −٣ = صفر موجب لكل س ∈ ع

∴ جذرا المعادلة ٢س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ع

تحقق من فهمك

(١) عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٢س − ٣ ب) د(س) = ٤ − س جـ) د(س) = س^{٢} − ٤

د) د(س) = ١ − س^{٢} هـ) د(س) = ٤ + ٤س + س^{٢} و) د(س) = ٣س − ٢س^{٢} + ٤

تمـــارين (١ – ٥)

أولًا: أكمل ما يأتى:

١) الدالة د، حيث د(س) = - ٥ إشاراتها .... فى الفترة ....

٢) الدالة د، حيث د(س) = س^{٢} + ١ إشاراتها .... فى الفترة ....

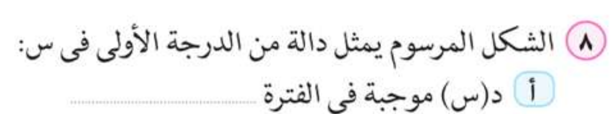
٣) الدالة د، حيث د(س) = س^{٢} – ٦ س + ٩ موجبة فى الفترة ....

٤) الدالة د، حيث د(س) = س – ٢ موجبة فى الفترة ....

٥) الدالة د، حيث د(س) = ٣ – س سالبة فى الفترة ....

٦) الدالة د، حيث د(س) = – (س – ١) (س +٢) موجبة فى الفترة ....

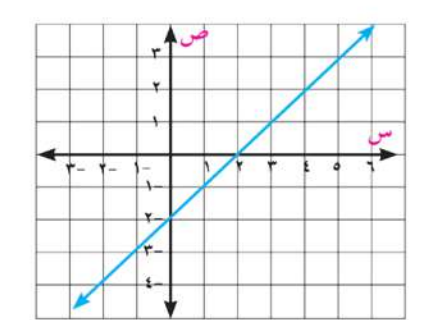
٧) الدالة د، حيث د(س) = س^{٢} + ٤ س – ٥ سالبة فى الفترة ....



٨) الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى فى س:

أ) د(س) موجبة فى الفترة ....

ب) د(س) سالبة فى الفترة ....



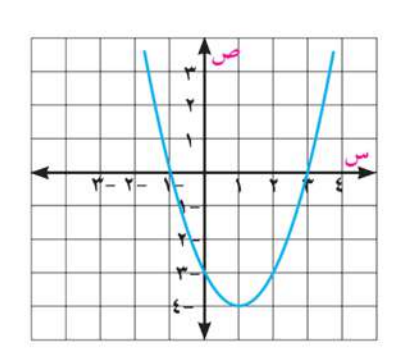


٩) الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الثانية فى س:

أ) د(س) = ٠ عندما س ∋ ....

ب) د(س) > ٠ عندما س ∋ ....

ج) د(س) < ٠ عندما س ∋ ....



ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠) فى التمارين من (أ) إلى (ن) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٢ ....

ب) د(س) = ٢س ....

ج) د(س) = – ٣س ....

د) د(س) =٢س+٤ ....

هـ) د(س) =٣ – ٢س ....

و) د(س) = س^{٢} ....

ز) د(س) = ٢س^{٢} ....

ح) د(س) = س^{٢} – ٤ ....

ط) د(س) = ١ – س^{٢} ....

ى) د(س) = (س – ٢) (س + ٣) ....

ك) د(س) = (٢ س – ٣)^{٢} ....

ل) د(س) = س^{٢}– س – ٢ ....

م) د(س) = س^{٢}– ٨ س + ١٦ ....

ن) د(س) = – ٤ س^{٢} + ١٠ س – ٢٥ ....

....

(١١) ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} – ٩ فى الفترة [– ٣، ٤]، ومن الرسم عين إشارة د(س).

(١٢) ارسم منحنى الدالة د(س) = – س^{٢} + ٢ س + ٤ فى الفترة [– ٣، ٥]، ومن الرسم عين إشارة د(س).

(١٣) اكتشف الخطأ: إذا كانت د(س) = س + ١، ر(س) = ١ – س^{٢} فعين الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

حل يوسف

س = – ١ تجعل د(س) = ٠

د(س) موجبة فى الفترة]- ١، ∞[،

س = ± ١ تجعل ر(س) = ٠

ر(س) موجبة فى الفترة]– ١، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]- ١، ∞[∪]– ١، ١[=]– ١، ∞[

حل أميرة

س = – ١ تجعل د(س) = ٠

د(س) موجبة فى الفترة]- ١، ∞[،

س = ± ١ تجعل ر(س) = ٠

ر(س) موجبة فى الفترة]– ١، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]- ١، ∞[∩]– ١، ١[=]– ١، ١[

أى الإجابتين يكون صحيحًا؟ مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا وتأكد من صحة الإجابة.

....

(١٤) مناجم الذهب: فى الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية يتحدد بالدالة د : د(ن) = ١٢ ن^{٢} – ٩٦ ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات، د(ن) انتاج الذهب

أولًا: ابحث إشارة دالة الإنتاج د. ....

ثانيًا: أوجد إنتاج منجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠، ٢٠٠٥ ....

ثالثًا: فى أى عام كان إنتاج المنجم مساويًا ٢٠١٦ ألف أوقية؟ ....

متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

١ - ٦

Quadratic Inequalities

سوف تتعلم

- حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد.

المتباينات التربيعية: Quadratic Inequalities



سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد؟

لاحظ أن:

$س^2 - س - 2 > 0$ هى متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالى

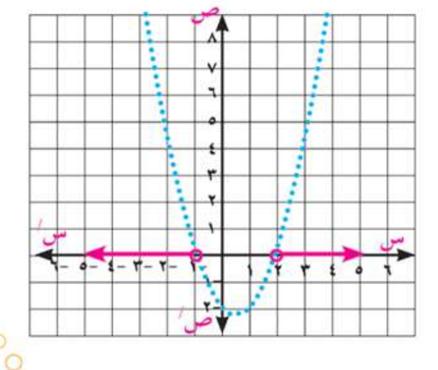
بينما $د(س) = س^2 - س - 2$ هى الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينة Inequality

من الشكل المقابل نجد أن:

- مجموعة حل المتباينة $س^2 - س - 2 > 0$ فى ع هى $]-\infty ، -1[\cup]2 ، \infty[$
- مجموعة حل المتباينة $س^2 - س - 2 < 0$ فى ع هما $]-1 ، 2[$



الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية



حل المتباينة التربيعية

مثال

(١) حل المتباينة: $س^2 - 5س - 6 > 0$

الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:

خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦

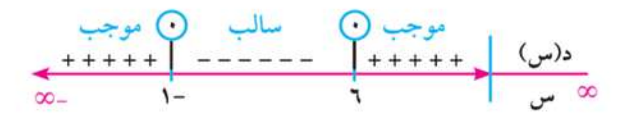
خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦ ،

ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

س = ٦ أ، س = −١



خطوة (٣): تحدد الفترات التى تحقق المتباينة س^{٢} − ٥س − ٦ > ٠



فيكون مجموعة حل المتباينة هى:]−∞، −١[∪]٦، ∞[

حاول أن تحل

(١) حل كلًا من المتباينات الآتية:

أ س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠ ب س^{٢} + س + ١٢ > ٠

مثال

(٢) حل المتباينة: (س + ٣)^{٢} ⩽ ١٠ − ٣(س + ٣).

الحل

★ ∵ (س + ٣)^{٢} ⩽ ١٠ − ٣(س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦س + ٩ ⩽ ١٠ − ٣س − ٩

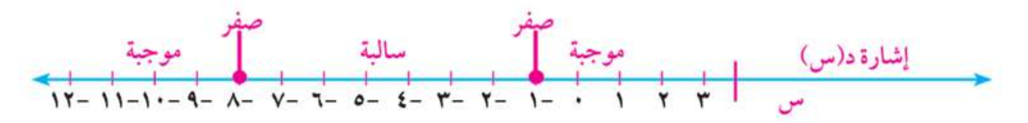
∴ س^{٢} + ٩س + ٨ ⩽ ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى: س^{٢} + ٩س + ٨ = ٠

بالتحليل إلى عوامل: (س + ٨)(س + ١) = ٠

مجموعة حل المعادلة: {−٨، −١}

★ ويوضح خط الأعداد التالى إشارة الدالة د(س) = س^{٢} + ٩س + ٨



وعلى ذلك فإن: مجموعة حل المتباينة هى : [-٨، -١]

حاول أن تحل

٢) حل المتباينات الآتية:

أ) ٥س^{٢} + ١٢س $\leqslant$ ٤٤

ب) (س + ٣)^{٢} + ٣(س + ٣) - ١٠ $\leqslant$ ٠

تحقق من فهمك

١) ما الفرق بين معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد ومتباينة الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

٢) ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

٣) **اكتشف الخطأ:** أوجد مجموعة حل المتباينة (س + ١)^{٢} < ٤(٢س - ١)^{٢}

حل يوسف

$\because$ (س + ١)^{٢} < ٤(٢س - ١)^{٢}

$\therefore$ س + ١ < ٢(٢س - ١) وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$\therefore$ -٤س + س + ٢ + ١ < ٠

$\therefore$ -٣ س + ٣ < ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى:

-٣س + ٣ = ٠

مجموعة الحل هى {١}

+ + + ⊙ - - - د(س)
-∞ ١ س ∞

★ بحث إشارة الدالة د حيث

د(س) = -٣ س + ٣

مجموعة حل المتباينة هى]١ ، ∞[

حل نور

$\because$ (س + ١)^{٢} < ٤(٢س - ١)^{٢}

$\therefore$ س^{٢} + ٢س + ١ < ١٦س^{٢} - ١٦س + ٤

$\therefore$ ١٥س^{٢} - ١٨س + ٣ > ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

$\therefore$ ٣(٥س - ١)(س - ١) = ٠

مجموعة الحل هى {١، $\frac{١}{٥}$}

+++⊙- - - - -⊙+++ د(س)
-∞ $\frac{١}{٥}$ ١ س ∞

★ بحث إشارة الدالة د حيث

د(س) = ١٥ س^{٢} - ١٨ س + ٣

نجد أن:

مجموعة حل المتباينة هى ح - [$\frac{١}{٥}$، ١]

٤) **تفكير ناقد:** أوجد مجموعة حل المتباينة (س + ٣)^{٢} < ١٠ - ٣ (س + ٣)



أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

١) $س^{٢} \leq ٩$

٢) $س^{٢} - ١ \leq ٠$

٣) $٢س - س^{٢} < ٠$

٤) $س^{٢} + ٥ \leq ١$

٥) $(س - ٢)\ (س - ٥) < ٠$

٦) $س\ (س + ٢) - ٣ \leq ٠$

٧) $(س - ٢)^{٢} \leq -٥$

٨) $٥ - ٢س \leq س^{٢}$

٩) $س^{٢} \geq ٦\ س - ٩$

١٠) $٣\ س^{٢} \leq ١١\ س + ٤$

١١) $س^{٢} - ٤\ س + ٤ \geq ٠$

١٢) $٧ + س^{٢} - ٤\ س < ٠$

① حل المعادلة: أس^{٢}+ب س +جـ = ٠ حيث أ،ب،جـ ∈ ح، أ ≠ ٠

الطريقة
التحليل إلى العوامل
إكمال المربع
استخدام القانون العام
التمثيل البيانى

② بحث نوع جذرى المعادلة التربيعية

يسمى المقدار (ب^{٢} – ٤أجـ) بمميز المعادلة التربيعية الذى يبين نوع جذور المعادلة وعدد حلولها كالآتى :

★ (ب^{٢} – ٤أجـ) > ٠ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

★ ب^{٢} – ٤أجـ = ٠ يوجد جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان).

★ ب^{٢} – ٤أجـ < ٠ يوجد جذران مركبان غير حقيقيين.

③ الأعداد المركبة:

العدد المركب هو الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان، ب هو الجزء التخيلى، والجدول التالى يبين قوى ت للأسس الصحيحة الموجبة:

ت$^{٤ن + ١}$	ت$^{٤ن + ٢}$	ت$^{٤ن + ٣}$	ت^{٤ن}
ت	– ١	– ت	١

تساوى عددين مركبين: إذا كان : أ + ب ت = جـ + ى ت فإن أ = جـ، ب = ى والعكس صحيح

خواص العمليات: يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، وعند جمع أو طرح الأعداد المركبة تجمع الأجزاء الحقيقية معًا وتجمع الأجزاء التخيلية معًا.

العددان المترافقان: يسمى العددان أ + ب ت ، أ – ب ت بالعددين المترافقين

حيث ناتج جمعهما عدد حقيقى، وحاصل ضربهما عدد حقيقى أيضًا.

٤) مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما ل، م فإن: ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$

٥) تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها:

إذا كانت ل، م جذرى المعادلة التربيعية، فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة الآتية:

★ (س – ل) (س – م) = ٠

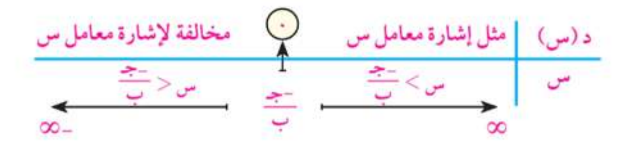
★ إذا كان ل + م = – $\frac{ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$ فإن المعادلة هى س^{٢}– (ل + م) س + ل م = ٠

٦) بحث إشارة الدالة:

★ إشارة الدالة الثابتة د، حيث د(س) = جـ ، (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.

★ قاعدة الدالة الخطية د هى د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠

فتكون س = – $\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠ والشكل التالى يمثل إشارة الدالة د:



★ لتعين إشارة الدالة د، حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، أ ≠ ٠ فإننا نوجد المميز

★ إذا كان: ب^{٢} – ٤أجـ > ٠ فإن إشارة الدالة د تتحدد حسب الشكل التالى:

د (س) | مثل إشارة معامل س^{٢} ٠ مخالفة لإشارة معامل س^{٢} ٠ مثل إشارة معامل س^{٢}
س | ∞ م ل –∞

★ إذا كان: ب^{٢} – ٤أجـ = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى: مثل إشارة أ عندما س ≠ ل ، د(س) = ٠ عندما س = ل

★ إذا كان: ب^{٢} – ٤أجـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س^{٢}.

(٧) حل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد:

لحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية :

١- نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ص = د(س) فى الصورة العامة.

٢- ندرس اشارة الدالة د المرتبطة بالمتباينة ونوضحها على خط الأعداد.

٣- تحديد مجموعة حل المتباينة طبقًا للفترات التى تحققها.

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:





أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...)
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على : (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- قياس زاوية Measure of an Angle
- طول Length
- مساحة Area
- ضرب تبادلى Cross Product
- طرف Extreme
- وسط Mean
- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زوايا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- بديهية Postulate/Axiom
- محيط Perimeter
- مساحة مضلع Area of polygon
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجي مشترك Common External Tangent
- مماس داخلي مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio



دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): تشابه المضلعات.

الدرس (٢ - ٢): تشابه المثلثات.

الدرس (٢ - ٣): العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس (٢ - ٤): تطبيقات التشابه فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

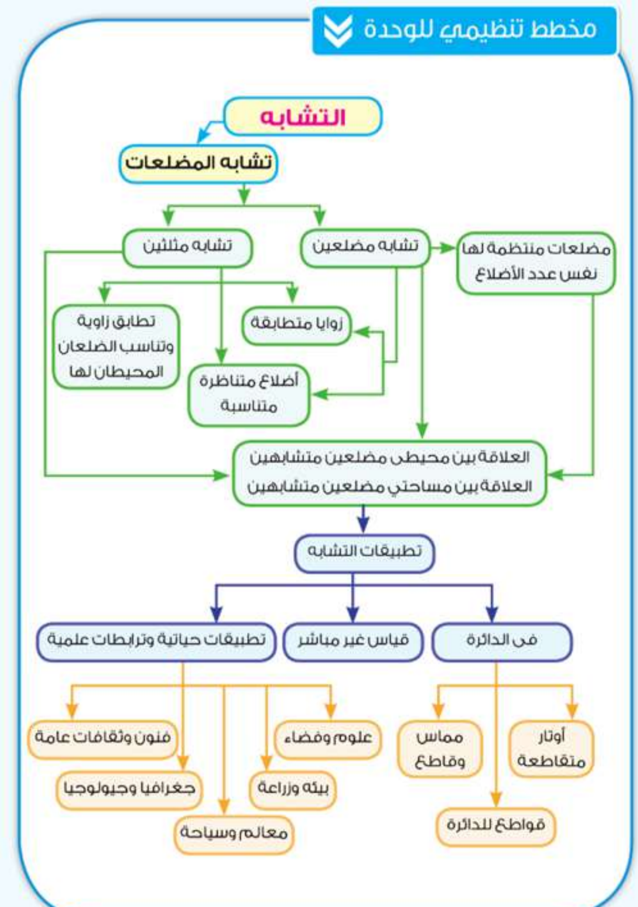
حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية - ورق مربعات - مرآة مستوية - أدوات قياس - آلة حاسبة.

نبذه تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبني، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسى على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوى قياسات نظائرها فى الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح فى بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوى على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتَعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفتافيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

مخطط تنظيمي للوحدة



تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

٢ - ١

سوف تتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- مقياس الرسم.
- المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية.

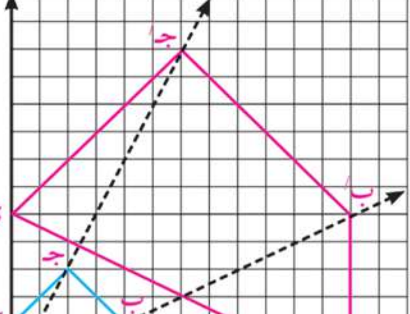
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زاويا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش



يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب جـ ى وصورته أ/ ب/ جـ/ ى/ بتحويل هندسي.

أ) قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠ أ ، ∠ أ/ - ∠ ب ، ∠ ب/

∠ جـ ، ∠ جـ/ - ∠ ى ، ∠ ى/

ماذا تستنتج؟

ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة $\frac{\text{أ/ب/}}{\text{أب}}$ ، $\frac{\text{ب/جـ/}}{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{جـ/ى/}}{\text{جـ ى}}$ ، $\frac{\text{ى/أ/}}{\text{ى أ}}$

ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، و إن اختلفت فى أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

المضلعان المتشابهان Similar polygons

تعريف «يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

لاحظ أن:

١- فى الشكل الموضح ببند فكر وناقش نجد:

أ) الزوايا المتناظرة متطابقة: ∠ أ/ ≡ ∠ أ ، ∠ب/ ≡ ∠ ب

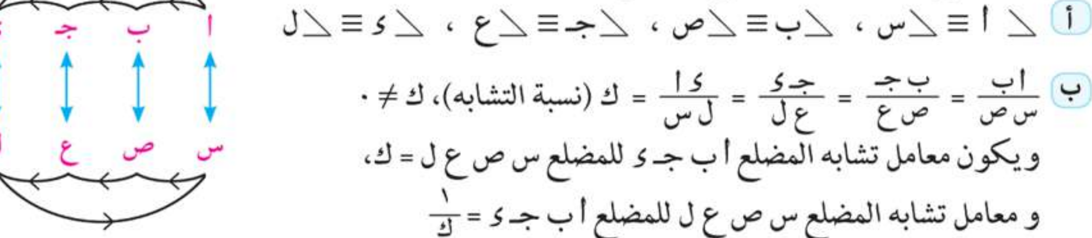
∠جـ/ ≡ ∠ جـ ، ∠ ى/ ≡ ∠ ى

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة: $\frac{\text{أ/ب/}}{\text{أب}} = \frac{\text{ب/جـ/}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ/ى/}}{\text{جـ ى}} = \frac{\text{ى/أ/}}{\text{ى أ}}$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ/ ب/ جـ/ ى/ يشابه الشكل أ ب جـ ى

٢- نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، و يراعى ترتيب كتابة رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

إذا كان المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع س ص ع ل فإن:

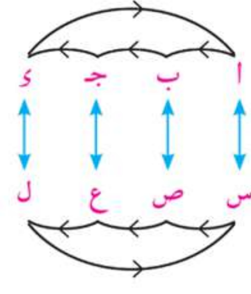


أ) $\angle$ أ $\equiv \angle$ س ، $\angle$ ب $\equiv \angle$ ص ، $\angle$ جـ $\equiv \angle$ ع ، $\angle$ ى $\equiv \angle$ ل

ب) $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ى أ}}{\text{ل س}} =$ ك (نسبة التشابه)، ك $\neq$ ٠

ويكون معامل تشابه المضلع أ ب جـ ى للمضلع س ص ع ل = ك،

و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ ى = $\frac{1}{\text{ك}}$

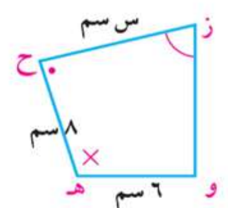


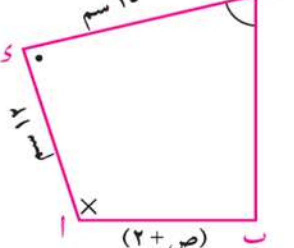
مثال

١) في الشكل المقابل: المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع هـ و ز ح.

أ) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ ى للمضلع هـ و ز ح.

ب) أوجد قيم س، ص.





الحل

$\because$ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{ى أ}}{\text{ح هـ}} =$ معامل التشابه،

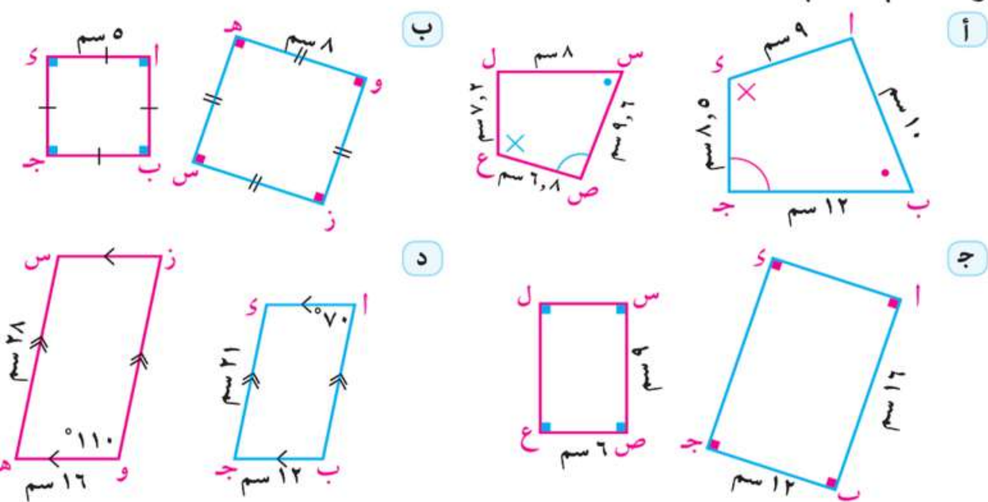
$\frac{\text{ص} + ٢}{٦} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨}$

أ) معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

ب) $\frac{١٥}{\text{س}} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ س = ١٠ سم ، $\frac{\text{ص} + ٢}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ ص = ٧ سم

حاول أن تحل

١) بيِّن أيًّا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة وحدِّد نسبة التشابه.

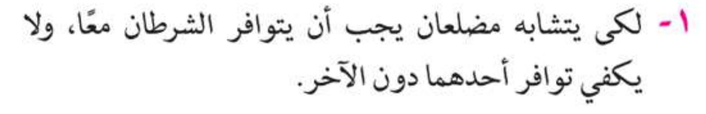


فكر

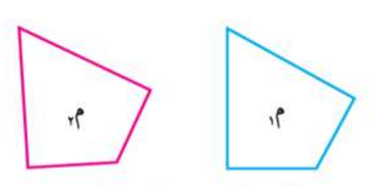
هل جميع المربعات متشابهة؟ هل جميع المعينات متشابهة؟

هل جميع المستطيلات متشابهة؟ هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

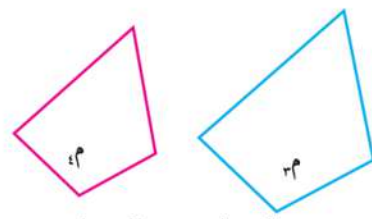


١- لكي يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معًا، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.



المضلع م١ ≡ المضلع م٢

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرطا التشابه (المضلع م١ ~ المضلع م٢) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساويًا (واحد) ولكن ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع م٣ ≇ المضلع م٤) كما فى الشكل المقابل.



المضلع م٣ ~ المضلع م٤

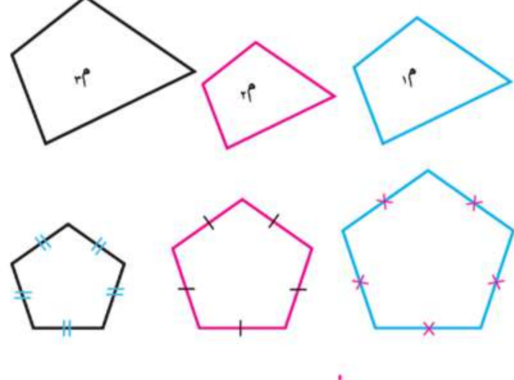
٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

فإذا كان المضلع م١ ~ المضلع م٢،

المضلع م٢ ~ المضلع م٣

فإن: المضلع م١ ~ المضلع م٣

٤- كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



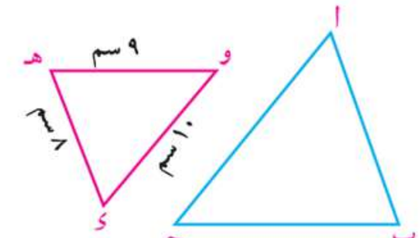
مثال

(٢) **فى الشكل المقابل:** △أ ب جـ ~ △ء هـ و،

ء هـ = ٨سم ، هـ و = ٩سم ، و ء = ١٠سم

إذا كان محيط △أ ب جـ = ٨١سم.

أوجد أطوال أضلاع △أ ب جـ.



الحل

∵ △أ ب جـ ~ △ء هـ و

$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ ب + ب جـ + جـ أ}}{\text{ء هـ + هـ و + و ء}} = \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ء هـ و}}$$ (خواص التناسب)

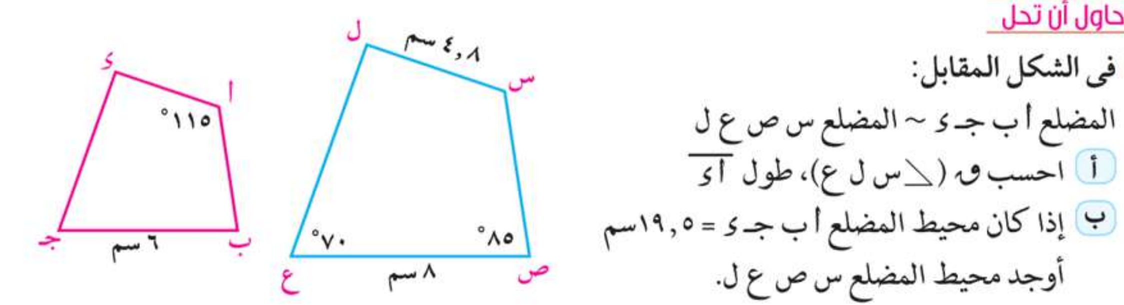
ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{جـ أ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

∴ أ ب = ٨ × $\frac{٨١}{٢٧}$ = ٢٤سم ، ب جـ = ٩ × ٣ = ٢٧ ، جـ أ = ١٠ × ٣ = ٣٠سم

لاحظ أن:

إذا كان المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$، **فإن** $\frac{\text{محيط المضلع } م_1}{\text{محيط المضلع } م_2}$ = نسبة التشابه (معامل التشابه)

حاول أن تحل



(٢) فى الشكل المقابل:

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(أ) احسب ق (∠س ل ع)، طول $\overline{أء}$

(ب) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ ء = ١٩,٥سم

أوجد محيط المضلع س ص ع ل.

معامل التشابه لمضلعين: Similarity ratio of two polygons

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_1$ للمضلع $م_2$

إذا كان: ك > ١ **فإن** المضلع $م_1$ هو تكبير للمضلع $م_2$

٠ < ك < ١ **فإن** المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$

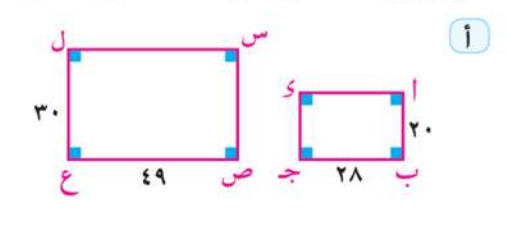
ك = ١ **فإن** المضلع $م_1$ يطابق المضلع $م_2$

وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

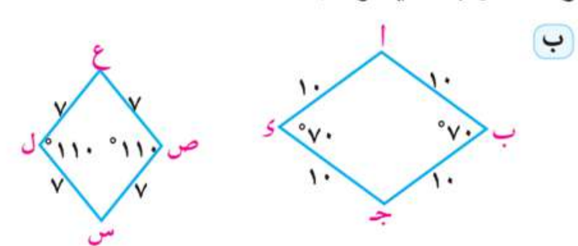
تمـــاريـن ٢ – ١

١) بين أيًّا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات).

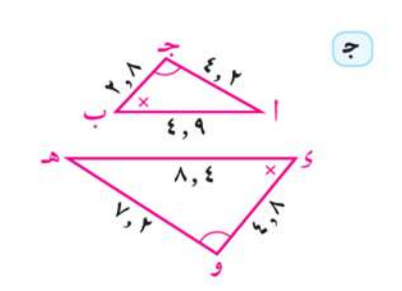
أ



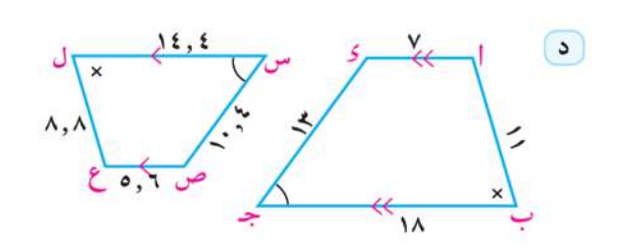
ب



جـ



د



٢) إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل، أكمل:

أ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{......}}{\text{ص ع}}$

ب) أ ب × ع ل = س ص × ......

جـ) $\frac{\text{ب جـ} + \text{ص ع}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{......} + \text{ل س}}{\text{ل س}}$

د) $\frac{\text{محيط المضلع ......}}{\text{محيط المضلع ......}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}}$

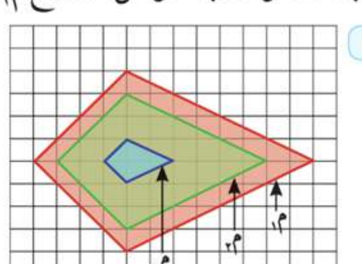
٣) المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل. فإذا كان: أ ب = ٣٢سم، ب جـ = ٤٠سم، س ص = ٣م – ١، ص ع = ٣م +١. أوجد قيمة م العددية.

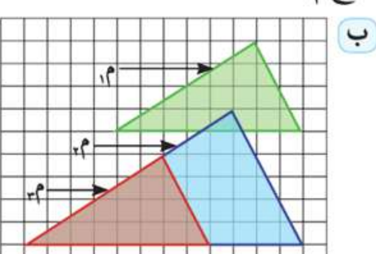
٤) مستطيل بعداه ١٠سم، ٦سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان:

أ) معامل التشابه ٣

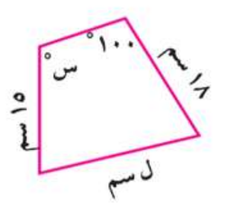
ب) معامل التشابه ٠,٤

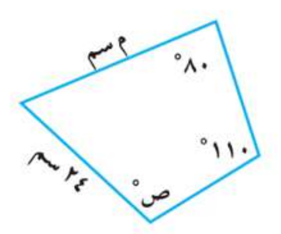
٥ فى كل من الأشكال التالية المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$.
أوجد معامل تشابه كل من المضلع $م_١$، المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$.

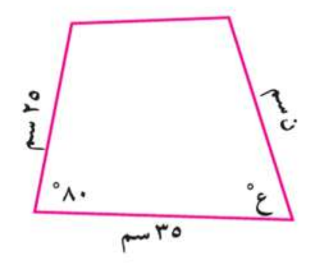
أ


ب


٦ المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم فى القياس.







٧ مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨سم، ١٢سم، ومحيط الثانى ٢٠٠سم. أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته.

نشاط

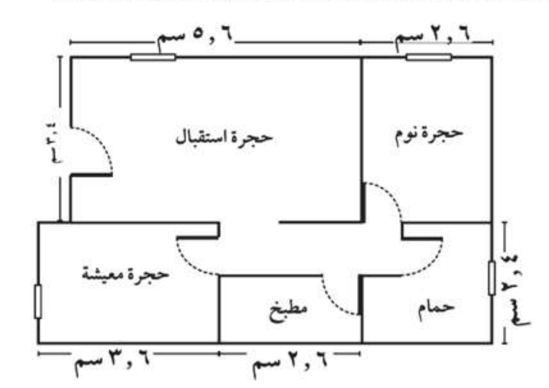
٨ **هندسة معمارية:** يوضح الشكل المقابل مخططًا لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد:

أ أبعاد حجرة الاستقبال.

ب أبعاد حجرة النوم.

جـ مساحة حجرة المعيشة.

د مساحة الوحدة السكنية.



تشابه المثلثات

Similarity of Triangles

٢ - ٢

سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر فى المثلث القائم الزاوية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- بديهية Postulate /Axiom

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مرآة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة



طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضى طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

ثبت طاليس عصا رأسيًا وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقى للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساويًا لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم فى أي وقت من يوم مشمس؟ فسِّر إجابتك.



١- ارسم △ ا ب جـ الذي فيه:
ق(∠ا) = ٥٠°، ق (∠ب) = ٧٠°، ا ب = ٤سم

٢- ارسم △ ى هـ و الذي فيه:
ق(∠ى) = ٥٠°، ق (∠هـ) = ٧٠°، ى هـ = ٥سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ى و}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب $\frac{\text{اجـ}}{\text{ى و}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$ ، $\frac{\text{ا ب}}{\text{ى هـ}}$
هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟
قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظاتك.

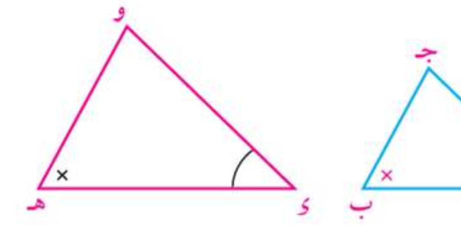
مسلمة postulate (or axiom)

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

فى الشكل المقابل:

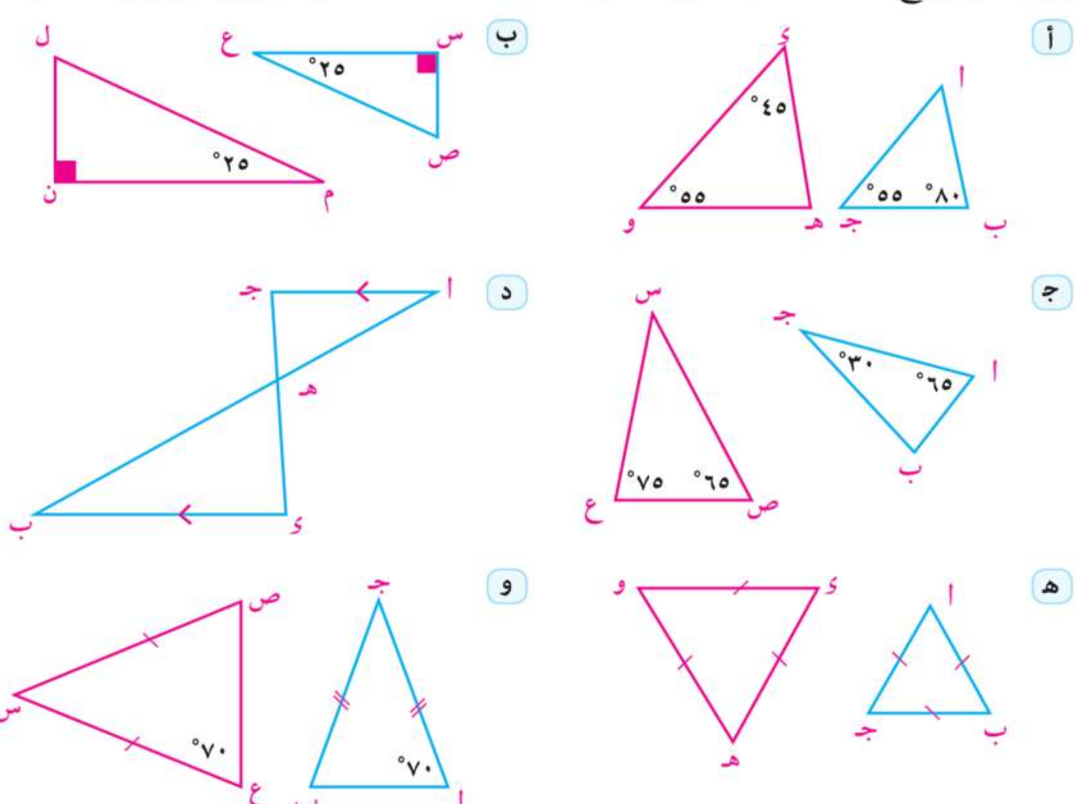
إذا كان ∠ ا ≡ ∠ ى ، ∠ ب ≡ ∠ هـ

فإن △ ا ب جـ ~ △ ى هـ و



حاول أن تحل

١ بيِّن أيًّا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة. اكتب المثلثات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة.



لاحظ أن

١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان. (كما فى هـ)

٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث الآخر: (كما فى و) أو إذا تساوى قياسا زاويتي رأسيهما.

٣- يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر (كما فى ب).

مثال

(١) فى المثلث ا ب جـ، ء ∈ $\overline{اب}$ ، هـ ∈ $\overline{اجـ}$ حيث $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$،
ب ء = ١,٢سم ، اهـ = ٣سم ، اجـ = ٤سم ، ء هـ = ٤,٢سم.

(أ) أثبت أن △ ا ء هـ ~ △ ا ب جـ

(ب) أوجد طول كل من: $\overline{اء}$ ، $\overline{بجـ}$

الحل

(أ) ∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{اب}$ قاطع لهما.

∴ ∠ ا ء هـ ≡ ∠ ا ب جـ

فى المثلثين ا ء هـ ، ا ب جـ

∵ ∠ ا ء هـ ≡ ∠ ا ب جـ (برهانًا)

∠ ء ا هـ ≡ ∠ ب ا جـ (زاوية مشتركة فى المثلثين)

∴ △ ا ء هـ ~ △ ا ب جـ (مسلمة التشابه)

(ب) ∵ △ ا ء هـ ~ △ ا ب جـ

∴ $\frac{اء}{اب} = \frac{اهـ}{اجـ} = \frac{ءهـ}{بجـ}$ ويكون:

$\frac{اء}{اء + ١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{بجـ}$

٤ اء = ٣(اء + ١,٢) ، ٣ ب جـ = ٤ × ٤,٢

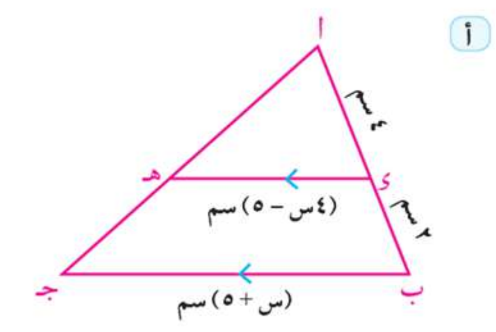
= ٣اء + ٣,٦ ، = $\frac{٤ × ٤,٢}{٣}$

اء = ٣,٦سم ، ب جـ = ٥,٦سم

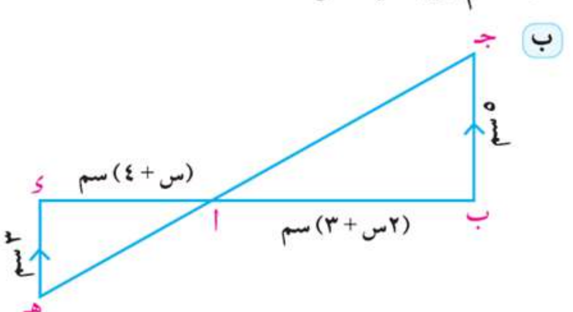
حاول أن تحل

(٢) فى كل من الأشكال التالية، أثبت أن △ا ب جـ ~ △ا ء هـ ثم أوجد قيمة س.

(أ)

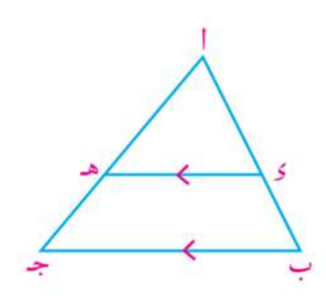


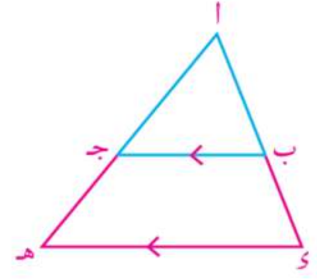
(ب)

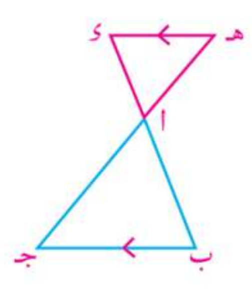


نتائج هامة

نتيجة ١ إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.







إذا كان ءهـ // ب جـ ويقطع أب ، أجـ فى ء، هـ على الترتيب كما فى الأشكال الثلاثة السابقة:
فإن: △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ.

مثال

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب ، رسم ءهـ // ب جـ
ويقطع أجـ فى هـ، ءو // أجـ ويقطع ب جـ فى و.
برهن أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و

الحل

∵ ءهـ // ب جـ ∴ △أ ء هـ ~ △أ ب جـ (١)
∵ ءو // أجـ ∴ △ ء ب و ~ △أ ب جـ (٢)
من (١)، (٢) ينتج أن: △ أ ء هـ ~ △ ء ب و (وهو المطلوب)

حاول أن تحل

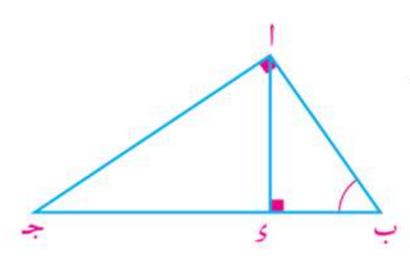
(٣) فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، ء ∈ أب، رسم ءهـ // ب جـ ويقطع
أجـ فى هـ، رسم أس يقطع ءهـ ، ب جـ فى س، ص على الترتيب.

أ) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

ب) أثبت أن: ء س / ب ص = س هـ / ص جـ = ء هـ / ب جـ.

نتيجة ٢ **إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.**

فى الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أء ⊥ ب جـ

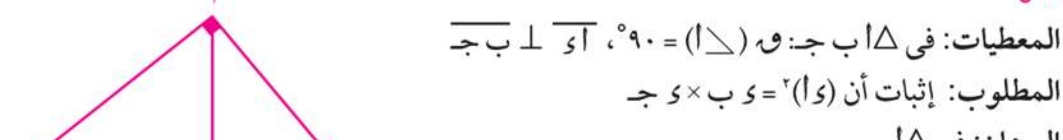


△ ء ب أ، △ أ ب جـ فيهما
ق(∠ أ ء ب) = ق (∠ جـ أ ب) = ٩٠° ، ∠ ب مشتركة فى المثلثين.
∴ △ ء ب أ ~ △ أ ب جـ (مسلمة التشابه) (١)
وبالمثل △ ء أ جـ ~ △ أ ب جـ (٢)
∵ المثلثان المشابهان لثالث متشابهان
∴ △ء ب أ ~ △ء أ جـ ~ △أ ب جـ

مثال

③ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن ء أ وسط متناسب بين ء ب، ء جـ.

الحل



المعطيات: فى △أ ب جـ: ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن $(ءأ)^٢$ = ء ب × ء جـ

البرهان: فى △أ ب جـ

∵ ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

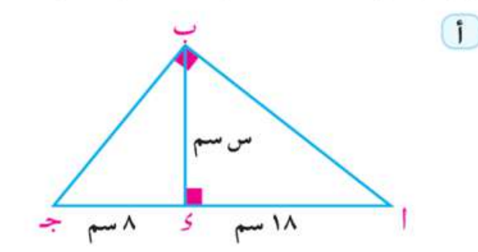
∴ △ ء ب أ ~ △ ء أ جـ (نتيجة)

ويكون: $\frac{ءأ}{ءجـ} = \frac{ءب}{ءأ}$ أى أن $(ءأ)^٢$ = ء ب × ء جـ

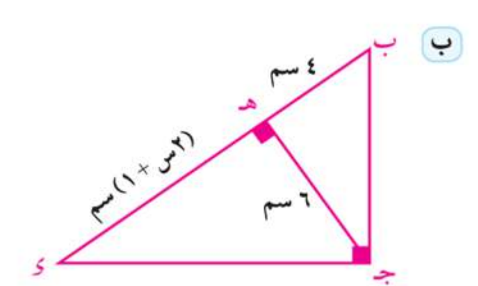
حاول أن تحل

④ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية:

أ

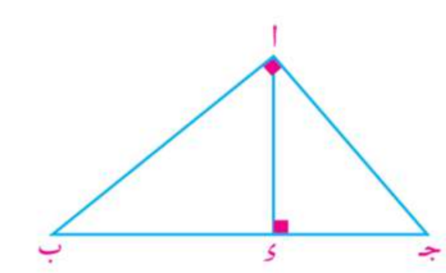


ب



مثال

④ فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ،



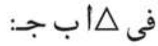
$\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن:

أ $(أ ب)^٢$ = ب جـ × ب ء

ب $(أ جـ)^٢$ = جـ ب × جـ ء



الحل



فى △أ ب جـ:

∵ ق (∠أ) = ٩٠°، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

∴ △ أ ب ء ~ △ جـ ب أ (نتيجة)

∴ $\frac{أب}{جـب} = \frac{بء}{بأ}$ ويكون: $(أ ب)^٢$ = ب جـ × ب ء

، △أ جـ ء ~ △ ب جـ أ (نتيجة)

∴ $\frac{أجـ}{بجـ} = \frac{جـء}{جـأ}$ ويكون: $(أ جـ)^٢$ = جـ ب × جـ ء

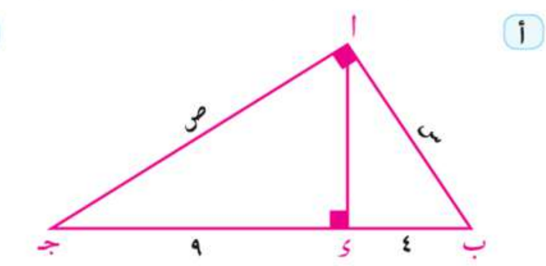


تعد النتائج التى تم إثبات صحتها فى مثالى ٣، ٤ برهانًا لنظرية أقليدس التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية.

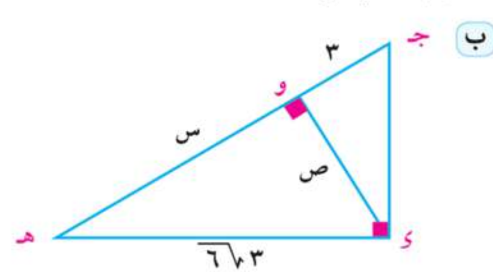
حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة س، ص العددية فى أبسط صورة (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات)

أ



ب



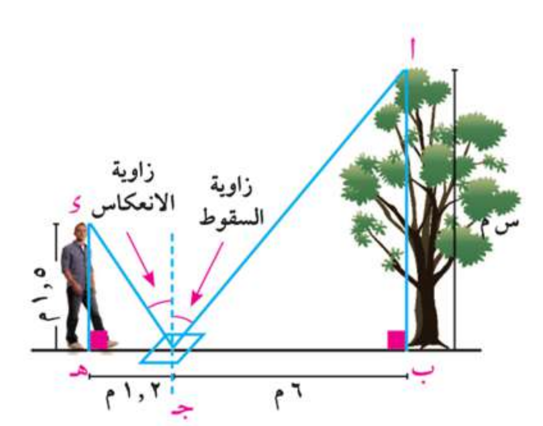
القياس غير المباشر Indirect measarement

فى بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة، وفي هذه الحالة يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرق تستخدم خاصية انعكاس الضوء فى المرآة المستوية، كما فى المثال التالى.

مثال

٥ فيزياء: أراد يوسف أن يعرف ارتفاع إحدى الأشجار فوضع مرآة على مسافة ٦ أمتار من قاعدة الشجرة، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى قمة الشجرة فى وسط المرآة - عند هذه النقطة كان يوسف قد تحرك بعيدًا عن المرآة مسافة ١,٢ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق سطح الأرض. فإذا كانت قدماه والمرآة وقاعدة الشجرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الشجرة. علمًا بأن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.



الحل

بفرض أن ارتفاع الشجرة س مترًا، قياس زاوية السقوط = $\theta°$

∴ قياس زاوية الانعكاس = $\theta°$

فى المثلثين أ ب جـ، ء هـ جـ

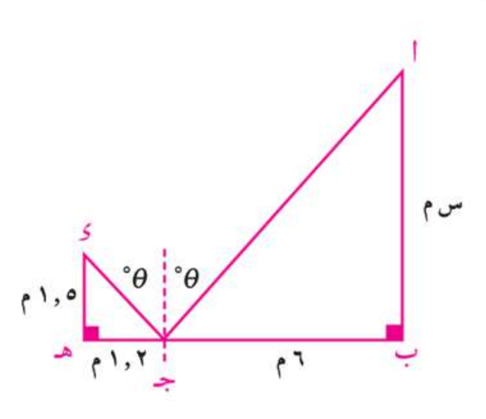
ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٩٠°

ق (∠أ جـ ب) = ق (∠ء جـ هـ) = (٩٠ - θ)°

∴ △أ ب جـ ~ △ء هـ جـ ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{٦}{١,٢}$ ويكون س = ٧,٥ متر

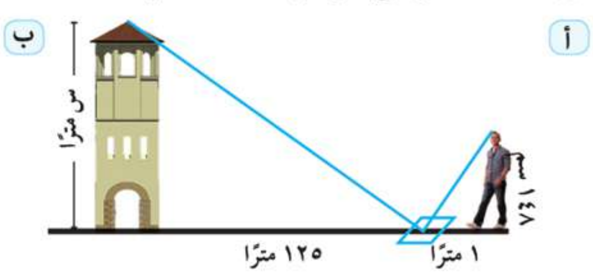
أي أن ارتفاع الشجرة يساوي ٧,٥ مترًا.



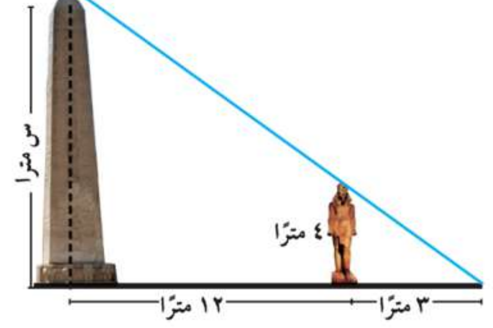
حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة س فى كل من الحالات الآتية:

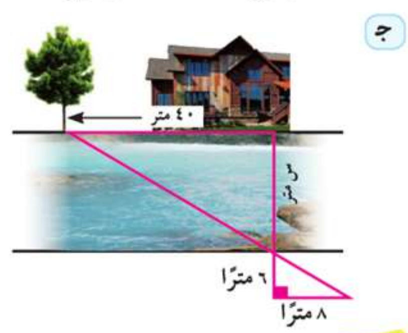
أ



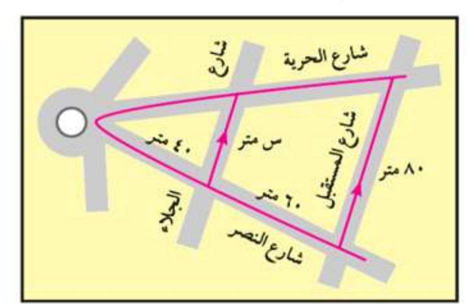
ب



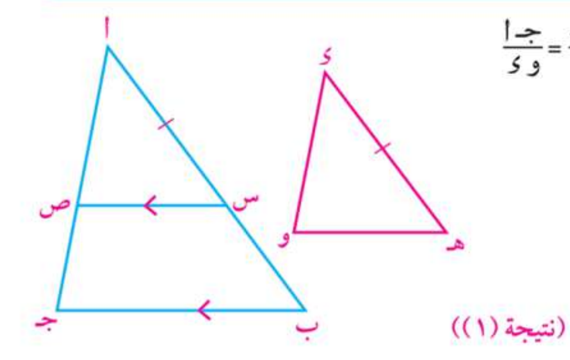
جـ



د



نظرية! إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.



المعطيات: المثلثان أ ب جـ ، ء هـ و فيهما $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{جـ أ}{و ء}$

المطلوب : △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

البرهان : عين س ∈ $\overline{أب}$ حيث أ س = ء هـ ،

ارسم $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أ جـ}$ فى ص.

∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ س ص (نتيجة (١))

ويكون $\frac{أب}{أس} = \frac{ب جـ}{س ص} = \frac{جـ أ}{ص أ}$

∵ أ س = ء هـ (عملًا)

∴ $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب جـ}{س ص} = \frac{جـ أ}{ص أ}$ (١)

∵ $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{جـ أ}{و ء}$ (معطيات) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: س ص = هـ و ، ص أ = و ء

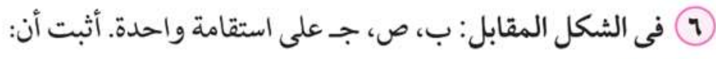
ويكون △ أ س ص ≡ △ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

∴ △ ء هـ و ~ △ أ س ص

∵ △ أ ب جـ ~ △ أ س ص (برهانا)

∴ △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و (وهو المطلوب)

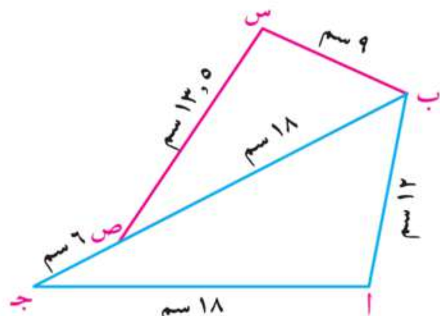
مثال



⑥ **فى الشكل المقابل:** ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:

أ) ∆ا ب جـ ~ ∆س ب ص

ب) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ا ب س





الحل

أ) فى المثلثين ا ب جـ، س ب ص نجد أن:

$\frac{\text{ا ب}}{\text{س ب}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{١٨ + ٦}{١٨} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{\text{ا جـ}}{\text{س ص}} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$

ويكون $\frac{\text{ا ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{س ص}}$ أى أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ ∆ا ب جـ ~ ∆س ب ص

ب) ∵ ∆ا ب جـ ~ ∆س ب ص ∴ ق (∠ا ب جـ) = ق (∠س ب ص)

أي أن: $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ا ب س

⑦ **في الشكل المقابل:** $\overleftrightarrow{\text{ا ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ى}} = \{\text{هـ}\}$ حيث $\frac{\text{ا هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ى هـ}}$ ، $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى هـ}}$ أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}} // \overleftrightarrow{\text{ب ى}}$



الحل

∵ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ى هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}}$ (من خواص التناسب) (١)

∵ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}}$ (من خواص التناسب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{جـ ا}}{\text{ى ب}}$

أي أن ∆ا هـ جـ ~ ∆ب هـ ى

∴ ق(∠ا جـ هـ) = ق(∠ب ى هـ)

وهما فى وضع تناظر بالنسبة للقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}} // \overleftrightarrow{\text{ب ى}}$

حاول أن تحل

⑦ ا ب جـ ى شكل رباعي، هـ ∈ $\overline{\text{ب ى}}$ حيث:

$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ى}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى ا}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}}$ أثبت أن:

أ) $\overline{\text{ا ى}} // \overline{\text{ب جـ}}$ ب) $\overline{\text{ا ب}} // \overline{\text{جـ هـ}}$

نظرية ٢ إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.

المعطيات: ∠ ا ≡ ∠ ء ، $\frac{\text{اب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$

المطلوب: △ اب جـ ~ △ ء هـ و

البرهان: خذ س ∈ $\overline{\text{اب}}$ حيث اس = ءهـ

وارسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ويقطع $\overline{\text{اجـ}}$ في ص

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ △ اب جـ ~ △ اس ص (نتيجة) (١)

ويكون $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{اص}}$

∵ $\frac{\text{اب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$ (معطى) ، اس = ءهـ (عملا)

∴ $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{ءو}}$ ويكون اص = ءو

∴ △ اس ص ≡ △ ء هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون △ اس ص ~ △ ء هـ و (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: △ اب جـ ~ △ ء هـ و وهو المطلوب.

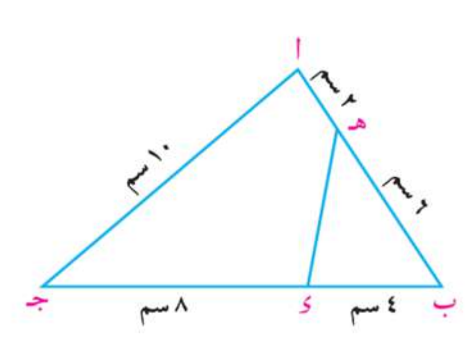
مثال

٨ اب جـ مثلث، اب = ٨سم ، اجـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{اب}}$ حيث اهـ = ٢سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب ء = ٤سم.

أ) برهن أن △ ب ء هـ ~ △ ب ا جـ واستنتج طول $\overline{\text{ءهـ}}$.

ب) برهن أن الشكل ا جـ ء هـ رباعي دائري.

الحل



∵ اب = ٨سم ، اهـ = ٢سم ∴ ب هـ = ٦سم

أ) المثلثان ب ء هـ ، ب ا جـ فيهما:

∠ ء ب هـ ≡ ∠ ا ب جـ (١)

، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ △ ب ء هـ ~ △ ب ا جـ (نظرية)

من التشابه $\frac{\text{ءهـ}}{\text{اجـ}} = \frac{١}{٢}$ ∴ ءهـ = $\frac{١}{٢}$ اجـ ، ءهـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥سم

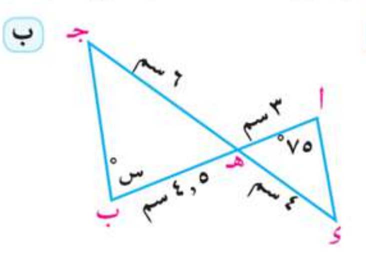
ب من التشابه أيضًا ∠ ب ى هـ ≡ ∠ ب ا جـ ∴ ق(∠ ب ى هـ) = ق(∠ ب ا جـ)

∵ ∠ ب ى هـ خارجة عن الشكل الرباعى ا جـ ى هـ ∴ الشكل ا جـ ى هـ رباعى دائرى.

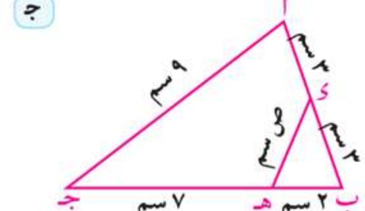
حاول أن تحل

٨ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس مفسرًا إجابتك.

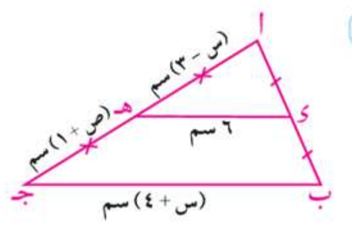
أ



ب



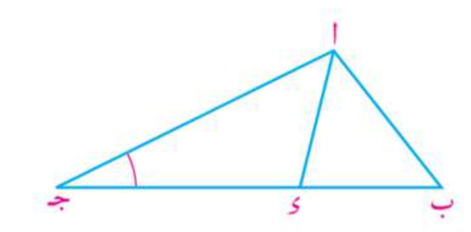
جـ



مثال

٩ ا ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث $(\text{ا جـ})^2$ = جـ ى × جـ ب أثبت أن: △ ا جـ ى ~ △ ب جـ ا

الحل



المثلثان ا ب جـ، ى ا جـ فيهما ∠ جـ مشتركة (١)

∵ $(\text{ا جـ})^2$ = جـ ى × جـ ب

∴ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{ا جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن △ ا جـ ى ~ △ ب جـ ا (نظرية)

حاول أن تحل

٩ ا ب جـ، ى هـ و مثلثان متشابهان، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ص منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ أثبت أن:

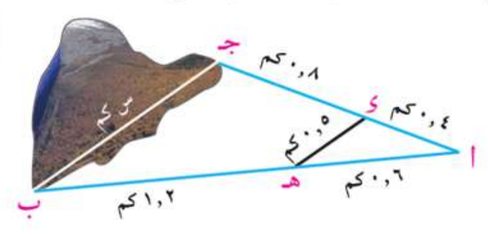
أ △ ا ب س ~ △ ى هـ ص

ب ا س × ى هـ = ا ب × ى ص

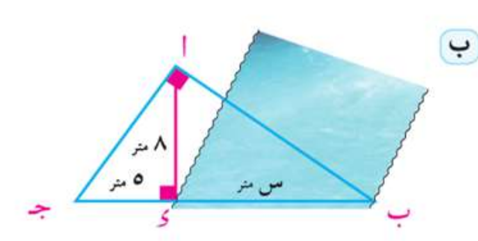
تحقق من فهمك

فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س.

أ

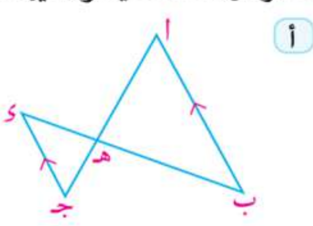


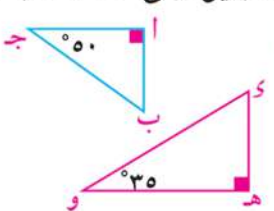
ب

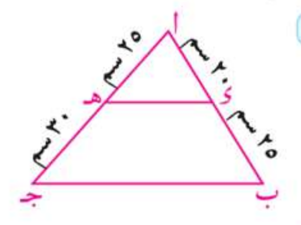


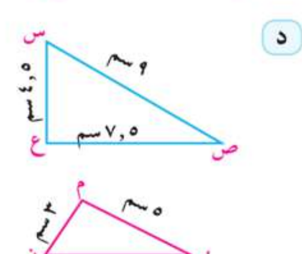
تمـــاريـن ٢ – ٢

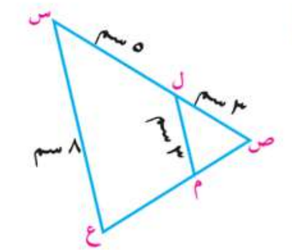
(١) اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وفى حالة التشابه اذكر سبب التشابه.

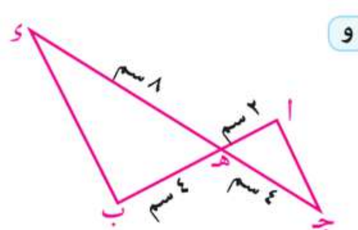


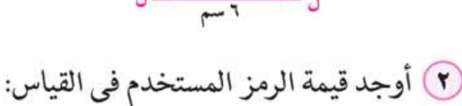




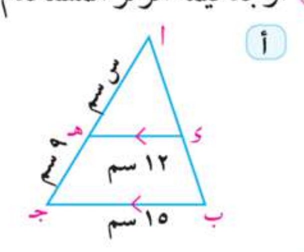








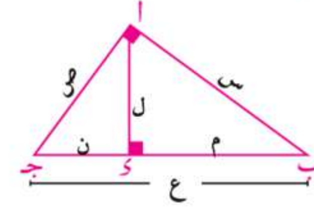
(٢) أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:



ب ، جـ

(٣) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث قائم الزاوية $\overline{اء} \perp \overline{ب جـ}$

أولًا: أكمل: $\triangle$ا ب جـ ~ $\triangle$ .... ~ $\triangle$ ....



ثانيًا: إذا كان س، ص، ع، ل، م، ن هى أطوال القطع المستقيمة بالسنتيمترات والمعينة بالشكل: فأكمل التناسبات التالية:

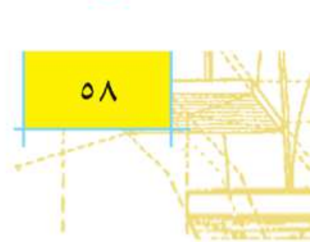
(أ) $\frac{س}{ع} = \frac{م}{.....}$ (ب) $\frac{س}{ع} = \frac{ل}{.....}$ (جـ) $\frac{م}{ل} = \frac{س}{.....}$ (د) $\frac{ل}{.....} = \frac{.....}{ل}$

(هـ) $\frac{س}{.....} = \frac{.....}{س}$ (و) $\frac{.....}{ص} = \frac{ص}{.....}$ (ز) $\frac{ل}{س} = \frac{.....}{ع}$ (ح) $\frac{ل}{س} = \frac{.....}{ص}$

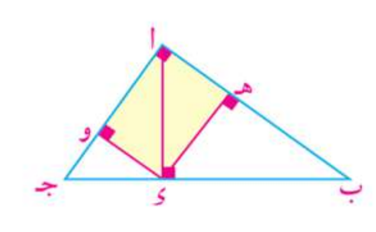
(٤) $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ء جـ}$ وتران فى دائرة، $\overleftrightarrow{ا ب} \cap \overleftrightarrow{ء جـ}$ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة، ا ب = ٤سم، ء جـ = ٧سم، ب هـ = ٦سم. أثبت أن $\triangle$ا ء هـ ~ $\triangle$جـ ب هـ، ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$

(٥) ا ب جـ، ء هـ و مثلثان متشابهان. رسم $\overleftrightarrow{ا س} \perp \overline{ب جـ}$ ليقطعه فى س، ورسم $\overleftrightarrow{ء ص} \perp \overline{هـ و}$ ليقطعه فى ص.
أثبت أن ب س × ص و = جـ س × ص هـ

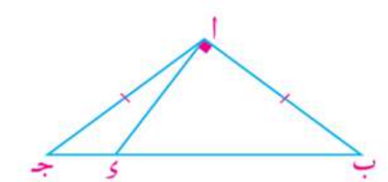
(٦) فى المثلث ا ب جـ، ا جـ > ا ب، م ∈ $\overline{ا جـ}$ حيث ق($\angle$ا ب م) = ق ($\angle$جـ) أثبت أن (ا ب)^2 = ا م × ا جـ.



(٧) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ا، رسم $\overleftrightarrow{اى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ليقطعه فى ى. إذا كان $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{1}{2}$، ا ى = $6\sqrt{2}$ سم
أوجد طول كل من $\overline{ب ى}$، $\overline{ا ب}$، $\overline{ا جـ}$.



(٨) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ا،
$\overline{اى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، $\overline{ى هـ}$ ⊥ $\overline{ا ب}$، $\overline{ى و}$ ⊥ $\overline{ا جـ}$
أثبت أن:
(أ) △ا ى هـ ~ △جـ ى و
(ب) مساحة المستطيل ا هـ ى و = $\sqrt{ا هـ \times هـ ب \times ا و \times و جـ}$



(٩) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث منفرج الزاوية فى ا،
ا ب = ا جـ. رسم $\overleftrightarrow{اى}$ ⊥ $\overline{ا ب}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى.
أثبت أن: $2(ا ب)^2$ = ب ى × ب جـ

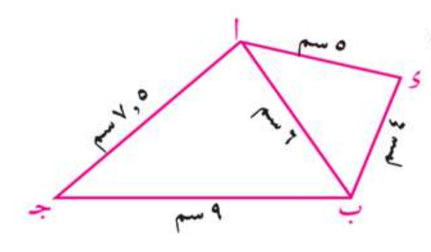
(١٠) تعبر المجموعتان ا، ب عن أطوال أضلاع مثلثات مختلفة بالسنتيمترات.
اكتب أمام كل مثلث من المجموعة ا رمز المثلث الذى يشابهه من المجموعة ب

مجموعة (ا)

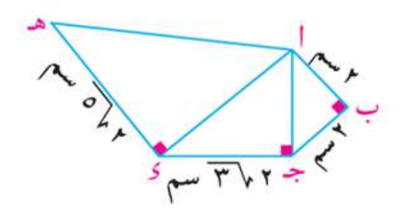
١	٦	٦	٦
٢	٥	٧	١١
٣	٥	٨	١٠
٤	٧	٨	١٢
٥	١٦	٢٧	٢٨

مجموعة (ب)

ا	٢,٥	٤	٥
ب	٨	١٣,٥	١٤
جـ	٢٥	٣٥	٥٥
ى	١١	١١	١١
هـ	٣,٥	٤	٦
و	٨	٦	١٠
ز	٣٢	٥٤	٤٢



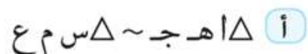
(١١) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم ،
ا جـ = ٧,٥سم ، ى نقطة خارجة عن المثلث ا ب جـ
حيث ى ب = ٤سم ، ى ا = ٥سم. أثبت أن:
(أ) △ا ب جـ ~ △ى ب ا
(ب) $\overrightarrow{ب ا}$ ينصف ∠ ى ب جـ



(١٢) **من الشكل المقابل أكمل:**
△ا ب جـ ~ △ ....
ومعامل التشابه = ...

١٣ **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ ~ س ص ع، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$،

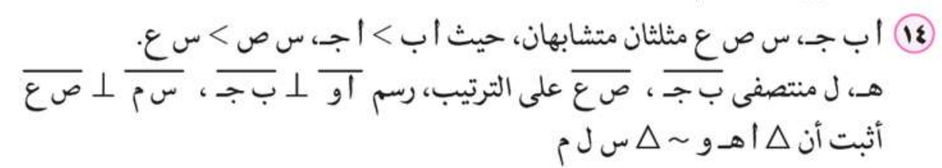
م منتصف $\overline{\text{ص ع}}$، $\overline{\text{جـ ى}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ع ل}} \perp \overline{\text{س ص}}$ أثبت أن:



أ $\triangle$ ا هـ جـ ~ $\triangle$ س م ع

ب $\frac{\text{جـ ى}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{س م}}$

١٤ ا ب جـ، س ص ع مثلثان متشابهان، حيث ا ب > ا جـ، س ص > س ع.



هـ، ل منتصفى $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ على الترتيب، رسم $\overline{\text{ا و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{س م}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

أثبت أن $\triangle$ ا هـ و ~ $\triangle$ س ل م

١٥ ا ب جـ مثلث، ى $\in \overline{\text{ب جـ}}$ حيث $(\text{ا ى})^2$ = ب ى × ى جـ ، ب ا × ا ى = ب ى × ا جـ أثبت أن:

أ $\triangle$ ا ب ى ~ $\triangle$ جـ ا ى　　**ب** $\overline{\text{ا ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$　　**جـ** ق ($\angle$ ب ا جـ) = ٩٠°

١٦ يبين المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبى يؤدى إلى المدينة جـ وعموديًّا على الطريق السريع بين المدينتين ا، ب.

أ كم ينبغى أن تبعد المحطة عن المدينة جـ؟

ب ما البعد بين المدينتين ب، جـ؟



نشاط

استخدام برنامج خرائط (*Google Earth*) لحساب أقصر بعد بين عواصم محافظات جمهورية مصر العربية

٢ - ٣

العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

على ورق مربعات رسم كل من المثلثين أ ب جـ، س ص جـ.

١- بين لماذا يكون:
△ س ص جـ ~ △أ ب جـ؟ أوجد معامل التشابه عندئذٍ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص جـ إلى مساحة المثلث الأصلى أ ب جـ

٣- عين نقطة أخرى مثل ء ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$، ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ء ء}'}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء$'$ لتحصل على المثلث ء ء$'$ جـ، هل △ ء ء$'$ جـ ~ △ س ص جـ؟

٤- أكمل الجدول التالي:

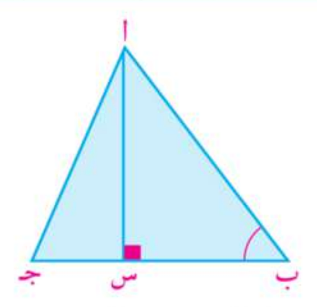
المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
△ س ص جـ ~ △أ ب جـ	$\frac{١}{٣}$	٤	٣٦	$\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$
△ ء ء$'$ جـ ~ △ أ ب جـ				
△ س ص جـ ~ △ ء ء$'$ جـ				

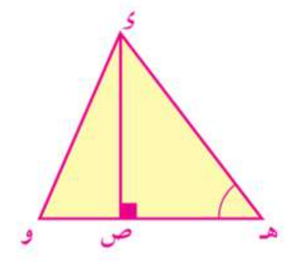
٥- ماذا تعنى النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

أولاً: النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين:

نظرية ٣

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.





المعطيات: △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و

المطلوب: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}\right)^{٢}$

> **لاحظ**
> الرمز م يعبر عن مساحة سطح المضلع

البرهان: ارسم $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{س}\}$،

$\overleftrightarrow{\text{ى ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{ى ص}} \cap \overline{\text{هـ و}} = \{\text{ص}\}$

$\because \triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}$ (١)

فى المثلثين أ ب س، ى هـ ص:

$\text{ق}(\angle \text{س}) = \text{ق}(\angle \text{ص}) = ٩٠^\circ$ ، $\text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$

$\therefore \triangle \text{أ ب س} \sim \triangle \text{ى هـ ص}$ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$ (٢)

$$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ب جـ} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢}\text{هـ و} \times \text{ى ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} \times \frac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$$

بالتعويض من (١)، (٢) ينتج أن:

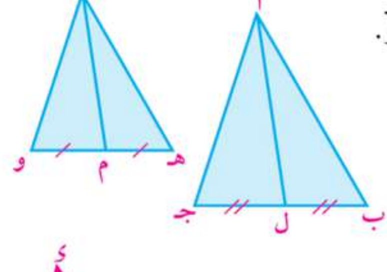
$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} \times \frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ أ}}{\text{و ى}}\right)^{٢}$ وهو المطلوب.

لاحظ أن: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ى هـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}$

فيكون: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{ى ص}}\right)^{٢}$

أى أن النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

تفكير ناقد:



١- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$، ل منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$.

هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ى م}}\right)^{٢}$؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

٢- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ى هـ و}$،

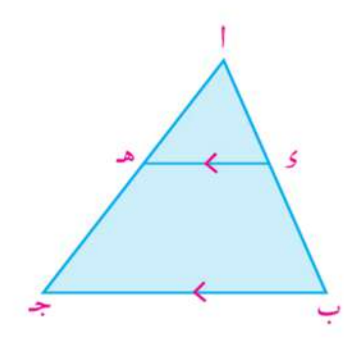
$\overrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف $\angle \text{أ}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ن،

$\overrightarrow{\text{ى ع}}$ ينصف $\angle \text{ى}$ ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع.

هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ى هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ى ع}}\right)^{٢}$؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.





(١) **في الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{أب}$

حيث $\frac{أى}{ى ب} = \frac{٣}{٤}$ ، $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ في هـ.

إذا كانت مساحة △ أ ب جـ = ٧٨٤سم². أوجد:

(أ) مساحة △ أ ى هـ.

(ب) مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ.

الحل

في △ أ ى جـ: ∵ $\overline{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ **(نتيجة)**

∴ $\frac{م(△ أى هـ)}{م(△ أب جـ)} = \left(\frac{أى}{أب}\right)^٢$ **(نظرية)**

ويكون $\frac{م(△ أى هـ)}{٧٨٤} = \left(\frac{٣}{٧}\right)^٢$ ∴ م(△ أ ى هـ) = ٧٨٤ × $\frac{٩}{٤٩}$ = ١٤٤سم²

∵ مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ = مساحة △ أ ب جـ − مساحة △ أ ى هـ

∴ مساحة شبه المنحرف ى ب جـ هـ = ٧٨٤ − ١٤٤ = ٦٤٠سم²

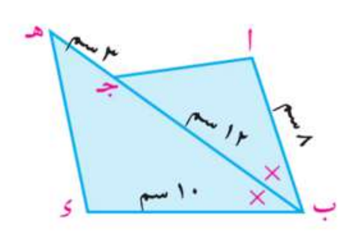


(١) **في الشكل المقابل:**

$\overleftrightarrow{ب هـ}$ منصف ∠ أ ب ى

، م(△ أ ب جـ) = ٤٨ سم²

أوجد: م(△ هـ ب ى)



مثال

(٢) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن △ أ ب جـ ~ △ ى هـ و

∴ $\frac{م(△ أب جـ)}{م(△ ى هـ و)} = \left(\frac{أب}{ى هـ}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$ ويكون $\frac{أب}{ى هـ} = \frac{٢}{٣}$

∵ $\frac{محيط △ أب جـ}{محيط △ ى هـ و} = \frac{أب}{ى هـ} = \frac{٢}{٣}$

ويكون $\frac{محيط (△ أب جـ)}{٩٠} = \frac{٢}{٣}$ ∴ محيط △ أ ب جـ = ٦٠سم

حاول أن تحل

② أ ب جـ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، $\frac{م(\triangle أ ب جـ)}{م(\triangle ء هـ و)} = \frac{٣}{٤}$

أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر $٤٥\sqrt{٣}$ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.

ب) إذا كان هـ و = ٢٨سم أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

مثال

③ إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث أ ب جـ لأقرب كيلو متر مربع إذا كان م(△أ ب جـ) = ٦,٤سم²



الحل

مقياس الرسم = معامل التشابه = $\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}$

$\frac{\text{مساحة } \triangle أ ب جـ}{\text{المساحة الحقيقية}}$ = مربع معامل التشابه

$\frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}} = \left(\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}\right)^{٢}$

المساحة الحقيقة = $٦,٤ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠^{٥} \times ١٠^{٥}$ سم²

$\simeq$ ٦٤٠ كم²

حاول أن تحل

③ أ) فى الخريطة المبينة أعلاه احسب مساحة المثلث ء هـ و بالسنتيمترات المربعة واستخدامها فى تقدير المساحة الحقيقية التي يمثلها لأقرب كيلو مربع.

ب) باستخدام إحدى خرائط جمهورية مصر العربية احسب مساحة شبه جزيرة سيناء لأقرب مائة كيلو متر مربع - قارن إجابتك مع زملائك.

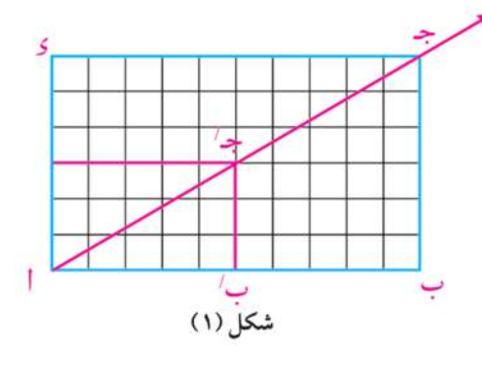
ثانيًا النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين The ratio between the area of two similar polygons

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك لبحث إمكانية تقسيم المضلعين المتشابهين إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

١- ارسم مضلعات متشابهة كما فى شكل (١)، شكل (٢).

٢- فى شكل (١) ارسم $\overleftrightarrow{أ جـ}$. ماذا تلاحظ؟



شكل (١)

٣- فى شكل (٢) إرسم $\overleftrightarrow{أ ى}$. ماذا تلاحظ؟ هل تجد تفسيرًا لذلك؟



شكل (٢)

لاحظ أن

فى المثلثين أ ب/ جـ/ ، أ ب جـ

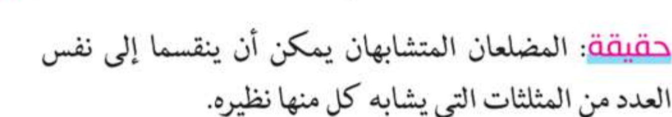
ق($\angle$ أ ب/ جـ/) = ق($\angle$ ب) **من تشابه المضلعين**

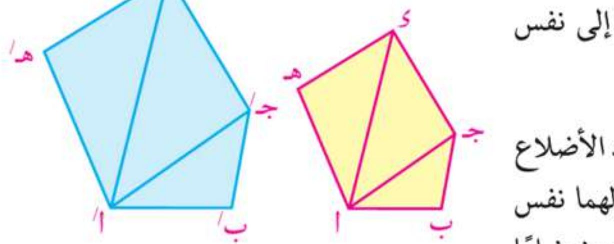
فيكون $\overline{ب/ جـ/}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ $\triangle$ أ ب/ جـ/ ~ $\triangle$ أ ب جـ **(نتيجة)**

وبالمثل ق ($\angle$ أ هـ/ ى/) = ق($\angle$ هـ)

∴ $\overline{هـ/ ى/}$ // $\overline{هـ ى}$ ويكون $\triangle$ أ هـ/ ى/ ~ $\triangle$ أ هـ ى **وهكذا.**

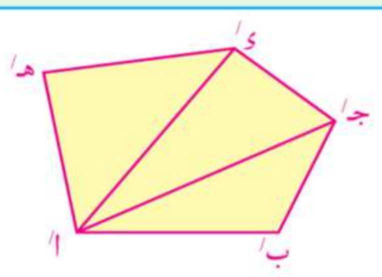


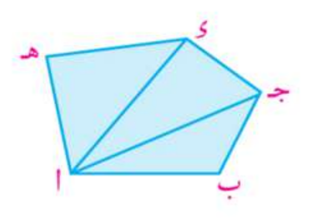


حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

ملاحظة: الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع = ن ضلعًا فإن عدد المثلثات التى يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة فى نفس الرأس) = ن − ٢ مثلثًا.

> **نظرية ٤**
> **النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.**





المعطيات: المضلع أ ب جـ ى هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/ هـ/

المطلوب: $\frac{م\ (المضلع\ أ\ ب\ جـ\ ى\ هـ)}{م\ (المضلع\ أ/\ ب/\ جـ/\ ى/\ هـ/)} = \left(\frac{أ\ ب}{أ/\ ب/}\right)^{٢}$

البرهان: من أ ، أ/ نرسم $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ى}$ ، $\overline{أ/ جـ/}$ ، $\overline{أ/ ى/}$

∵ المضلع أ ب جـ ى هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ى/ هـ/

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره **(حقيقة)**. ويكون:

$\frac{م(\triangle أ\ ب\ جـ)}{م(\triangle أ/\ ب/\ جـ/)} = \left(\frac{ب\ جـ}{ب/\ جـ/}\right)^{٢}$ ، $\frac{م(\triangle أ\ جـ\ ى)}{م(\triangle أ/\ جـ/\ ى/)} = \left(\frac{جـ\ ى}{جـ/\ ى/}\right)^{٢}$ ، $\frac{م(\triangle أ\ ى\ هـ)}{م(\triangle أ/\ ى/\ هـ/)} = \left(\frac{ى\ هـ}{ى/\ هـ/}\right)^{٢}$

∵ $\frac{ب\ جـ}{ب/\ جـ/} = \frac{جـ\ ى}{جـ/\ ى/} = \frac{ى\ هـ}{ى/\ هـ/} = \frac{أ\ ب}{أ/\ ب/}$ **(من تشابه المضلعين)**

$\therefore \frac{م(\triangle أ ب جـ)}{م(\triangle أ' ب' جـ')} = \frac{م(\triangle أ جـ ى)}{م(\triangle أ' جـ' ى')} = \frac{م(\triangle أ ى هـ)}{م(\triangle أ' ى' هـ')} = \left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^٢$

ومن خواص التناسب

$\frac{م(\triangle أ ب جـ) + م(\triangle أ جـ ى) + م(\triangle أ ى هـ)}{م(\triangle أ' ب' جـ') + م(\triangle أ' جـ' ى') + م(\triangle أ' ى' هـ')} = \left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^٢$

ويكون: $\frac{م\ (المضلع\ أ ب جـ ى هـ)}{م\ (المضلع\ أ' ب' جـ' ى' هـ')} = \left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^٢$ وهو المطلوب

ملاحظة

$\left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^٢ = \frac{(أ ب)^٢}{(أ' ب')^٢}$

حاول أن تحل

٤ أ) إذا كان المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع أ' ب' جـ' ى'، $\frac{أ ب}{أ' ب'} = \frac{١}{٣}$ فاكتب ما يساويه كلٌّ من:

$\frac{م\ (المضلع\ أ ب جـ ى)}{م\ (المضلع\ أ' ب' جـ' ى')}$ ، $\frac{محيط\ المضلع\ أ ب جـ ى}{محيط\ المضلع\ أ' ب' جـ' ى'}$

ب) إذا كان المضلعان أ ب جـ ى هـ، أ' ب' جـ' ى' هـ' متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

فاكتب ما يساويه كل من: $\frac{أ ب}{أ' ب'}$ ، $\frac{محيط\ المضلع\ أ ب جـ ى هـ}{محيط\ المضلع\ أ' ب' جـ' ى' هـ'}$

جـ) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥سم^٢ .أوجد مساحة المضلع الثاني.

د) إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢سم، ١٦سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥سم^٢. فإوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤) أ ب جـ ى، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: ق$(\angle أ) = ٤٠°$ ، س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ، جـ ى = ١٦سم.

احسب: **أولًا:** ق$(\angle س)$ **ثانيًا:** طول $\overline{ع ل}$ **ثالثًا:** م(المضلع أ ب جـ ى) : م (المضلع س ص ع ل)

الحل

$\because$ المضلع أ ب جـ ى ~ المضلع س ص ع ل

$\therefore$ ق$(\angle أ)$ = ق$(\angle س)$ فيكون ق$(\angle س) = ٤٠°$ (المطلوب أولًا)

$\because$ س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب $\therefore \frac{أ ب}{س ص} = \frac{٤}{٣}$ (من خواص التناسب)

من تشابه المضلعين نجد أيضًا $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{جـ ى}{ع ل}$

$\therefore \frac{٤}{٣} = \frac{١٦}{ع ل}$ فيكون ع ل = $\frac{٣ \times ١٦}{٤}$ = ١٢سم (المطلوب ثانيًا)

م(المضلع أ ب جـ ى) : م (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)^٢ : (س ص)^٢

= ١٦ك^٢ : ٩ك^٢

١٦ : ٩ (المطلوب ثالثًا)

لاحظ أن

أ ب = ٤ك

س ص = ٣ك

ك ≠ ٠

مثال

⑤ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤. إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥سم^{٢} فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

∵ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٣ : ٤

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٤

بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩س سم^{٢} ، مساحة المضلع الثاني = ١٦س سم^{٢}

∴ ٩س + ١٦س = ٢٢٥ ويكون س = $\frac{٢٢٥}{٩ + ١٦}$ = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ٩ = ٨١ سم^{٢}

∴ مساحة المضلع الثاني = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم^{٢}

حاول أن تحل

⑤ الربط مع الزراعة: مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٥ ، إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدانًا، فأوجد مساحة كل منهما.

مثال

⑥ أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان. تقاطع قُطرى الأول فى م وتقاطع قُطرى الثاني فى ن.
أثبت أن مـ(المضلع أ ب جـ ء) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

الحل

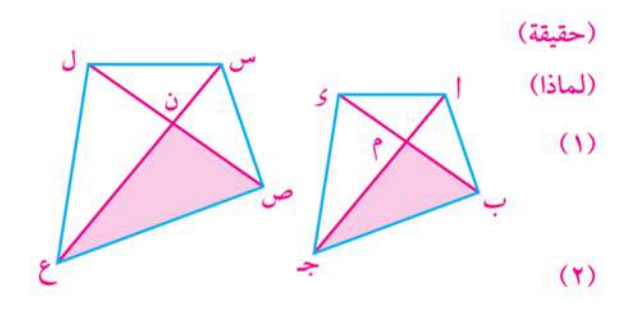
∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ △ أ ب جـ ~ △ س ص ع

، △ ء ب جـ ~ △ ل ص ع (حقيقة)

∴ △ م ب جـ ~ △ ن ص ع (لماذا)

ويكون $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{ن ع}}$ (١)



∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{مـ (المضلع س ص ع ل)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

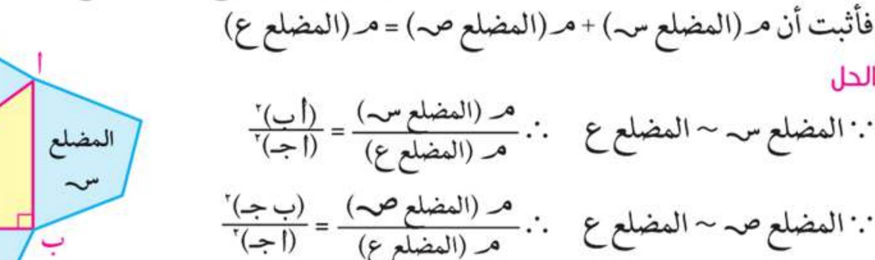
مـ (المضلع أ ب جـ ء) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

حاول أن تحل

(٦) أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ فأثبت أن:
م (المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ء)^{٢} : (ن ل)^{٢}

مثال

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ و هى على الترتيب: المضلع س، المضلع ص، المضلع ع.
فأثبت أن م (المضلع س) + م (المضلع ص) = م (المضلع ع)



الحل

$\because$ المضلع س ~ المضلع ع $\therefore \dfrac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \dfrac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

$\because$ المضلع ص ~ المضلع ع $\therefore \dfrac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \dfrac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

$\because \dfrac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}} + \dfrac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \dfrac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} + \dfrac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

$= \dfrac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ (١)

$\because$ ق ($\angle$ ب) = ٩٠° (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} (٢)

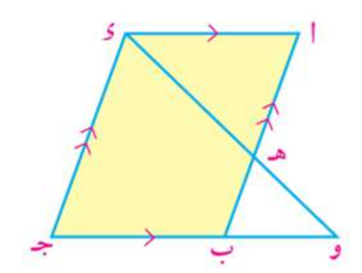
من (١)، (٢) ينتج أن $\dfrac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}} + \dfrac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = ١$

ويكون م (المضلع س) + م (المضلع ص) = م (المضلع ع)

حاول أن تحل

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، فيه أ ب = ٥سم، ب جـ = ١٣ سم، حيث $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة ل، م، ن منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ من الخارج على الترتيب.
فإذا كانت مساحة سطح المضلع ل تساوى ١٠٠سم^{٢} أوجد مساحة سطح كل من المضلعين م، ن.

تحقق من فهمك



فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء متوازى أضلاع،
هـ $\in \overline{\text{أ ب}}$ حيث $\dfrac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \dfrac{٣}{٢}$، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ = {و}

(١) أثبت أن $\triangle$ ء جـ و ~ $\triangle$ هـ أ ء

(٢) أوجد $\dfrac{\text{م } (\triangle \text{ ء جـ و})}{\text{م } (\triangle \text{ هـ أ ء})}$



تمارين ٢ – ٣

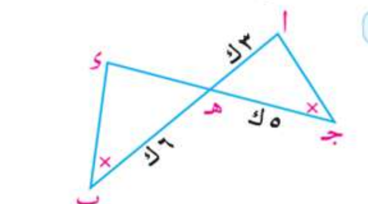
(١) أكمل:

(أ) إذا كان △ا ب جـ ~ △س ص ع، وكان ا ب = ٣ س ص فإن $\frac{\text{م (△س ص ع)}}{\text{م (△ا ب جـ)}}$ = ...

(ب) إذا كان △ ا ب جـ ~ △ ء هـ و، م (△ ا ب جـ) = ٩ م (△ ء هـ و) وكان ء هـ = ٤سم فإن:
ا ب = ... سم

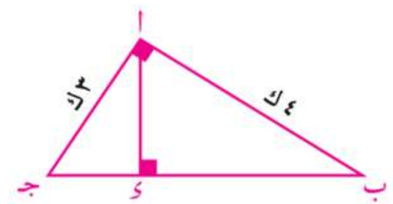
(٢) ادرس كلًّا من الأشكال التالية، حيث ك ثابت تناسب، ثم أكمل:

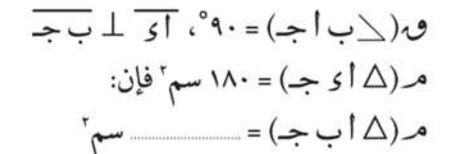
(أ)



$\overline{\text{ا ب}} \cap \overline{\text{جـ ء}}$ = {هـ}
م (△ ا جـ هـ) = ٩٠٠ سم^2
فإن: م (△ ء هـ ب) = ... سم^2

(ب)





ق (∠ب ا جـ) = ٩٠°، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$
م (△ ا ء جـ) = ١٨٠ سم^2 فإن:
م (△ ا ب جـ) = ... سم^2

(٣) ا ب جـ مثلث، ء ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا ء = ٢ ب ء، هـ ∈ $\overline{\text{ا جـ}}$ حيث $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$
إذا كانت مساحة △ ا ء هـ = ٦٠سم^2. أوجد مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ.

(٤) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع ا ب س، ب جـ ص، ا جـ ع
أثبت أن: م (△ا ب س) + م (△ب جـ ص) = م (△ا جـ ع).

(٥) ا ب جـ مثلث فيه $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدئرة فقطع $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ فى هـ. أثبت أن: $\frac{\text{م (△ا ب جـ)}}{\text{م (△ا ب هـ)}} = \frac{٧}{١٦}$

(٦) ا ب جـ ء متوازى أضلاع س ∈ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$، س ∉ $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ب س = ٢ ا ب، ص ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$، ص ∉ $\overline{\text{جـ ب}}$
حيث ب ص = ٢ ب جـ ، رسم متوازى الأضلاع ب س ع ص أثبت أن: $\frac{\text{م (ا ب جـ ء)}}{\text{م (س ب ص ع)}} = \frac{١}{٤}$

(٧) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$ يقطعة فى ء، رُسم على $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ المربعان ا س ص ب، ب م ن جـ خارج المثلث ا ب جـ.

أ) أثبت أن المضلع ء ا س ص ب ~ المضلع ء ب م ن جـ

ب) إذا كان ا ب = ٦سم، ا جـ = ١٠سم. أوجد النسبة بين مساحتى سطحى المضلعين.

(٨) ا ب جـ مثلث، $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ا جـ}}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث، وهى المضلعات بين سـ، صـ، ع على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع سـ = ٤٠سم^{٢}، ومساحة المضلع صـ =٨٥ سم^{٢}، ومساحة المضلع ع = ١٢٥سم^{٢}.

أثبت أن المثلث ا ب جـ قائم الزاوية.

(٩) ا ب جـ ء مربع قسمت $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ا}}$ بالنقاط س، ص، ع، ل على الترتيب بنسبة ١ : ٣

أثبت أن:

أ) الشكل س ص ع ل مربع

ب) $\frac{\text{مـ المربع س ص ع ل}}{\text{مـ المربع ا ب جـ ء}} = \frac{٥}{٨}$

(١٠) صالة ألعاب مستطيلة الشكل أبعادها ٨ متر، ١٢ متر، تم تغطية أرضيتها بالخشب، فكلفت ٣٢٠٠ جنيه. احسب (باستخدام التشابه) تكاليف تغطية أرضية صالة مستطيلة أكبر بنفس نوع الخشب وبنفس الأسعار، إذا كان أبعادها ١٤، ٢١ من الأمتار.

٢ - ٤

تطبيقات التشابه فى الدائرة

Applications of Similarity in the circle

سوف تتعلم

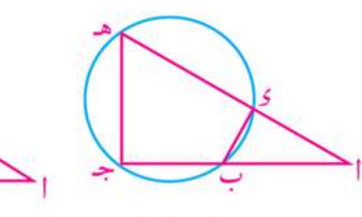
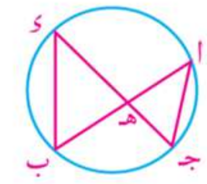
- العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطولى جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles

فكر و ناقش

فى كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.

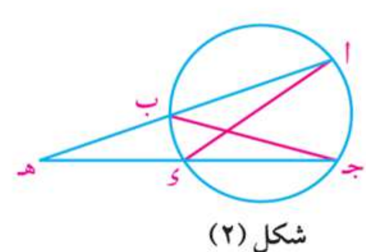
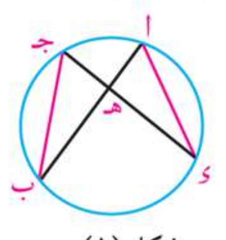
شكل (٣) شكل (٢) شكل (١)

- فى شكل (١): هل توجد علاقة بين هـ ا × هـ ب ، هـ جـ × هـ ى؟
- فى شكل (٢): هل توجد علاقة بين ا هـ × ا ى ، ا جـ × ا ب؟
- فى شكل (٣): هل توجد علاقة بين ا ى × ا جـ ، $(ا ب)^٢$؟

تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{ا ب}$ ، $\overline{جـ ى}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن:

هـ ا × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

شكل (٢) شكل (١)

لاستنتاج ذلك:

- ارسم $\overline{ا ى}$ ، $\overline{ب جـ}$
- فى كل من الشكلين أثبت أن المثلثين هـ ا ى ، هـ جـ ب متشابهان فيكون:

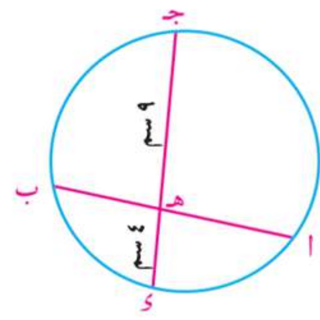
$$\frac{هـ ا}{هـ جـ} = \frac{هـ ى}{هـ ب} \qquad \therefore \text{هـ ا × هـ ب = هـ جـ × هـ ى}$$

مثال

① في الشكل المقابل: $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$

وإذا كان $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$، هـ جـ = ٩سم ، هـ ى = ٤سم

أوجد طول $\overline{هـ ب}$



الحل

∵ $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ أ = ٤ك ، هـ ب = ٣ك حيث ك ≠ ٠

∵ $\overline{أب} \cap \overline{جـ ى} = \{هـ\}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى (تمرين مشهور)

فيكون: ٤ك × ٣ك = ٩ × ٤

$١٢ك^٢ = ٣٦$

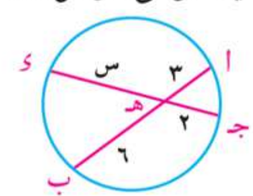
$ك^٢ = ٣$

ك = $\sqrt{٣}$ ، هـ ب = $٣\sqrt{٣}$ سم

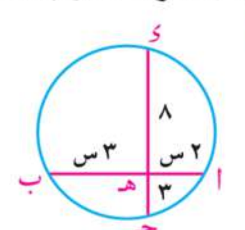
حاول أن تحل

① أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

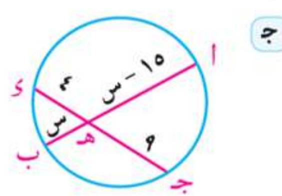
أ



ب



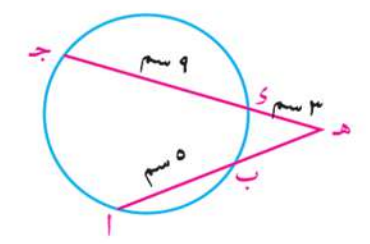
جـ



مثال

② في الشكل المقابل: $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{جـ ى} = \{هـ\}$ ، أ ب = ٥سم،

جـ ى = ٩سم ، هـ ى = ٣سم. أوجد طول $\overline{ب هـ}$



الحل

بفرض أن ب هـ = س سم.

∵ $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{جـ ى} = \{هـ\}$ ∴ هـ ب × هـ أ = هـ ى × هـ جـ (تمرين مشهور)

فيكون: س (س + ٥) = ٣ (٣ + ٩)

$س^٢ + ٥س - ٣٦ = صفر$

(س - ٤) (س + ٩) = صفر

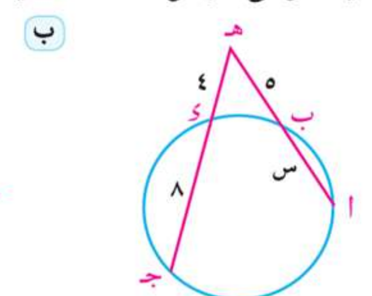
∴ س = ٤ ، س = -٩ مرفوض

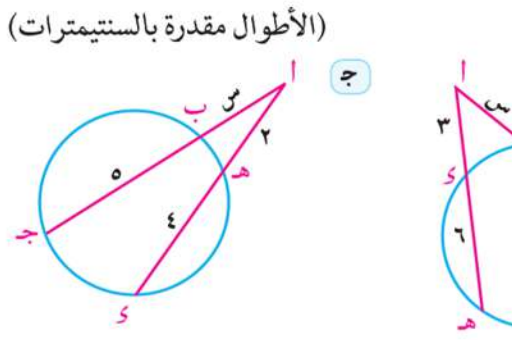
∴ طول $\overline{ب هـ}$ = ٤سم.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ ب ج





> **نتيجة ١**
> **إذا كانت م نقطة خارج دائرة، $\overleftrightarrow{م ج}$ يمس الدائرة فى ج، $\overleftrightarrow{م ب}$ يقطعها فى أ ، ب فإن**
> $(م ج)^٢ = م أ \times م ب$.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{م ج}$ مماس للدائرة

، $\overleftrightarrow{م ب}$ يقطع الدائرة فى أ، ب

$\therefore (م ج)^٢ = م أ \times م ب$

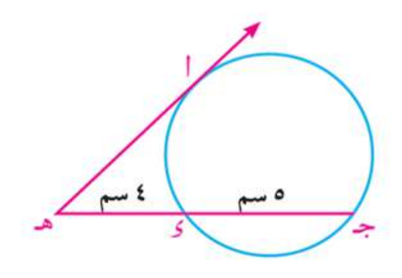


مثال

٣ **فى الشكل المقابل:** $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة،

$\overleftrightarrow{هـ ج}$ يقطع الدائرة فى ى، جـ على الترتيب.

حيث هـ ى = ٤سم ، جـ ى = ٥سم ، أوجد طول $\overline{هـ أ}$



الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس، $\overleftrightarrow{هـ ج}$ قاطع للدائرة

$\therefore (هـ أ)^٢ = هـ ى \times هـ جـ$ (نتيجة)

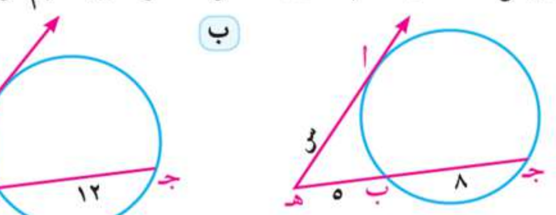
$(هـ أ)^٢ = ٤(٤ + ٥) = ٣٦$

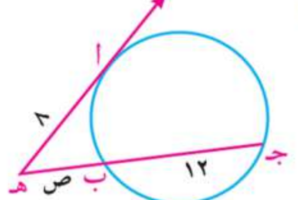
$\therefore$ هـ أ = ٦سم

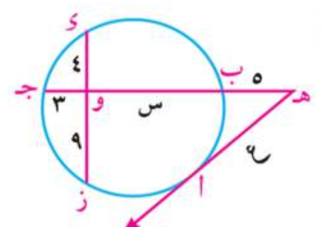
حاول أن تحل

٣ فى كل من الأشكال التالية $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة. أوجد قيم س، ص، ع العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ ب ج







عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ فى نقطة هـ (مختلفة عن أ، ب، جـ، ى)

وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى فإن : النقط أ، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

لاحظ أن:

هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

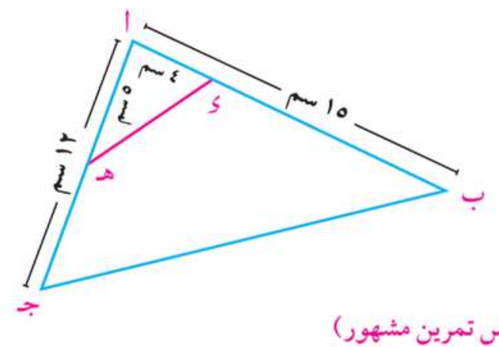
فيكون $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}}$

- هل △ هـ أ ى ~ △ هـ جـ ب؟ لماذا؟
- هل ق (∠ أ) = ق (∠ جـ)؟ لماذا؟
- هل النقط أ، ى، ب، جـ تقع على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.



(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم. ى ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ ى = ٤سم، هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ حيث أ جـ = ٥سم.

أثبت أن الشكل ى ب جـ هـ رباعي دائرى.



الحل

∵ أ ى × أ ب = ٤ × ١٥ = ٦٠،

أ هـ × أ جـ = ٥ × ١٢ = ٦٠

∴ أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = {أ} ، أ ى × أ ب = أ هـ × أ جـ

∴ النقط ى، ب جـ، هـ تقع على دائرة واحدة (عكس تمرين مشهور)

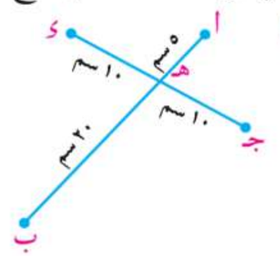
ويكون الشكل ى ب جـ هـ رباعيًا دائريًا

حاول أن تحل

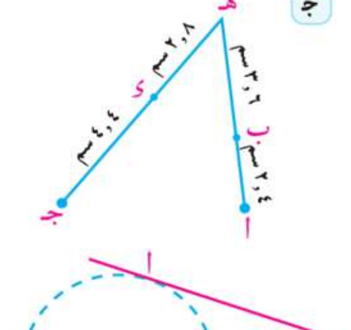
(٤) فى أيٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ى على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.

أ

ب



جـ





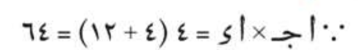
إذا كان $(\text{هـ أ})^2$ = هـ ب × هـ جـ

فإن $\overline{\text{هـ أ}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط أ، ب، جـ

مثال

٥ ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨سم، ا جـ = ٤سم، ء ∈ $\overleftrightarrow{اجـ}$ ، ء ∉ $\overline{اجـ}$ حيث جـ ء = ١٢سم.
أثبت أن $\overline{اب}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء


الحل


∵ ا جـ × ا ء = ٤ (٤ + ١٢) = ٦٤

، (ا ب)^٢ = (٨)^٢ = ٦٤

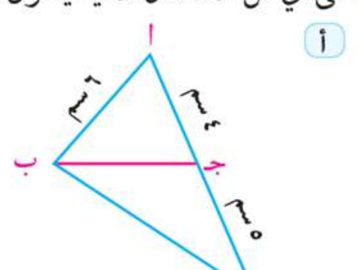
∴ (ا ب)^٢ = ا جـ × ا ء

∴ $\overline{اب}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء عند النقطة ب.

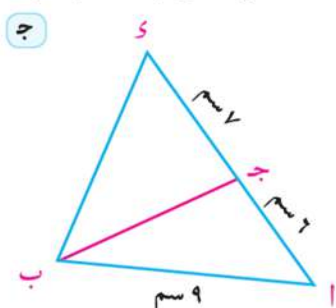

حاول أن تحل

٥ فى أيٍّ من الأشكال الآتية يكون $\overline{اب}$ مماسًا للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء

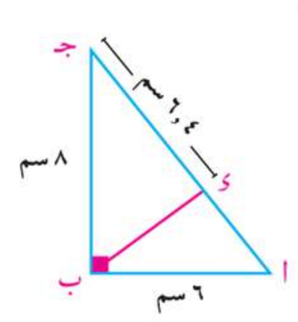
أ



ب



جـ



مثال

٦ تطبيقات حياتية: الربط مع الجيولوجيا: فى إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعي. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل المقابل. أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.




الحل

بفرض أن طول نصف قطر دائرة القوس = نو مترًا

∵ $\overline{اب}$ ، $\overline{جـء}$ وتران متقاطعان فى هـ

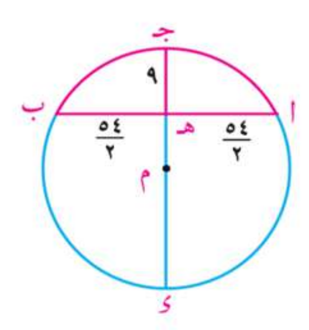
∴ هـ ا × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

٢٧ × ٢٧ = ٩ × (٢نو - ٩)

٢نو - ٩ = ٨١

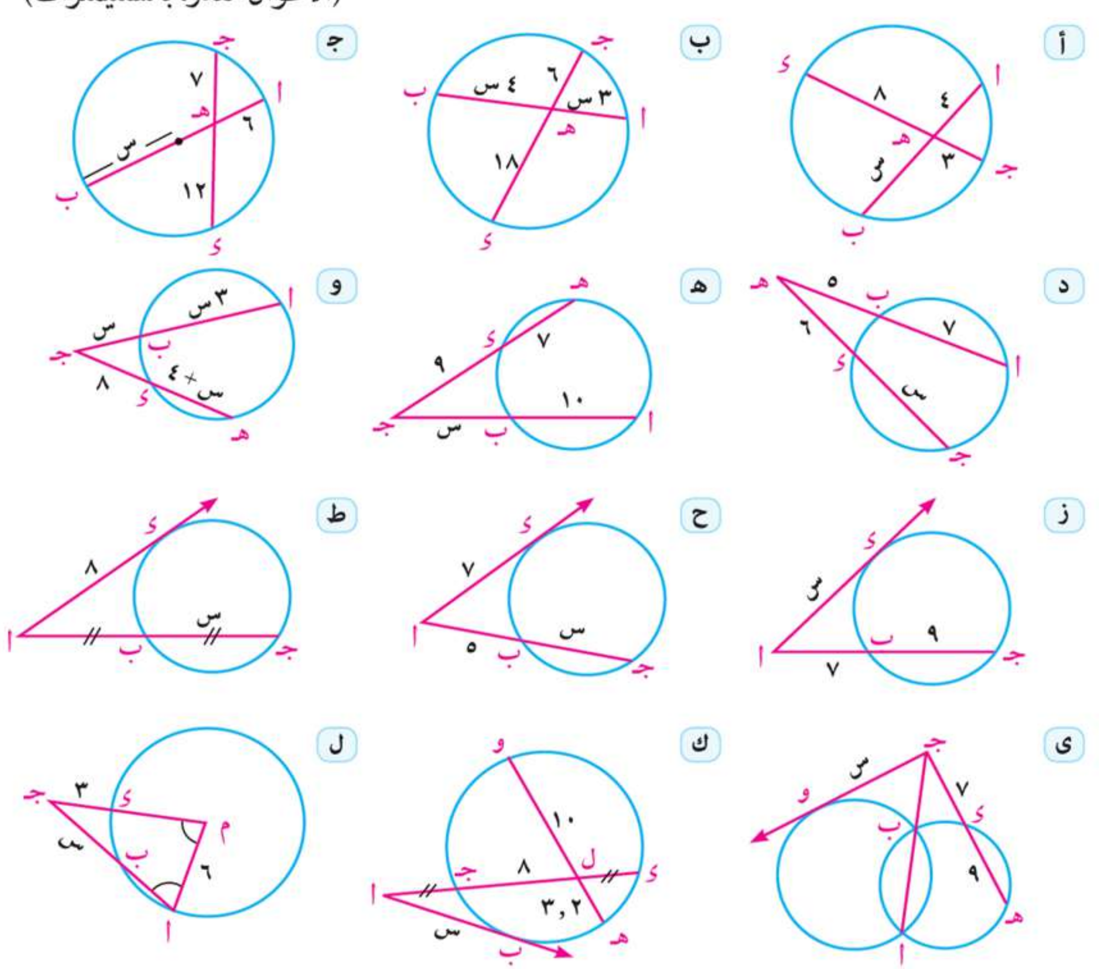
نو = ٤٥

أي أن طول نصف قطر دائرة القوس يساوي ٤٥ مترًا.

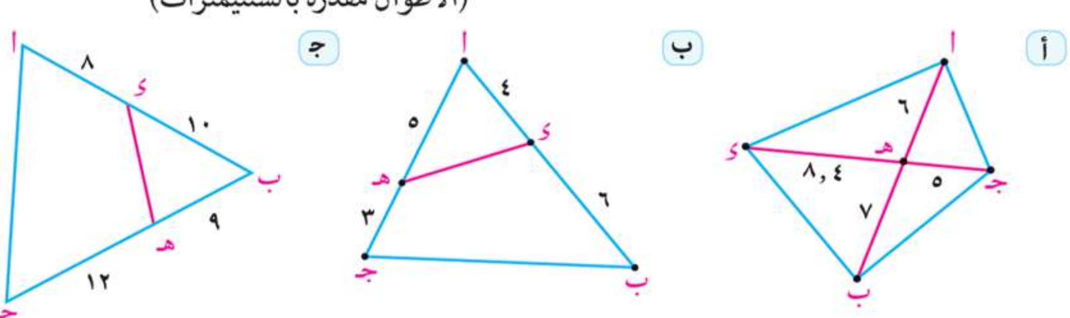


تمارين ٢ - ٤

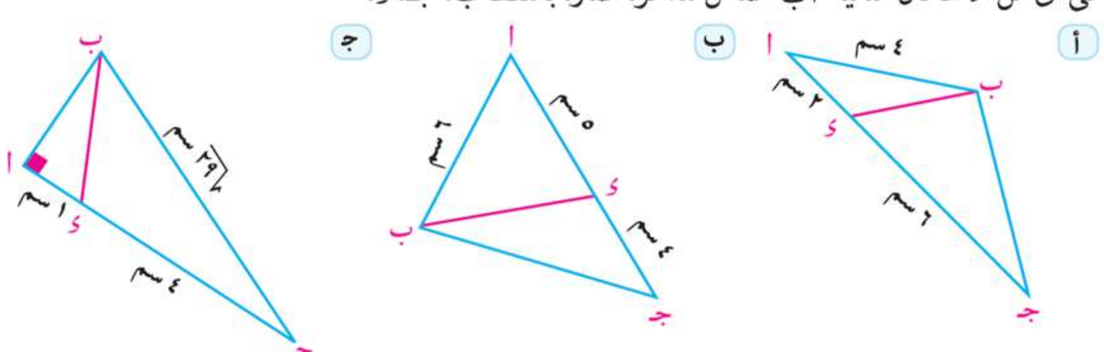
(١) باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلى، أوجد قيمة س العددية فى كل من الأشكال التالية.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



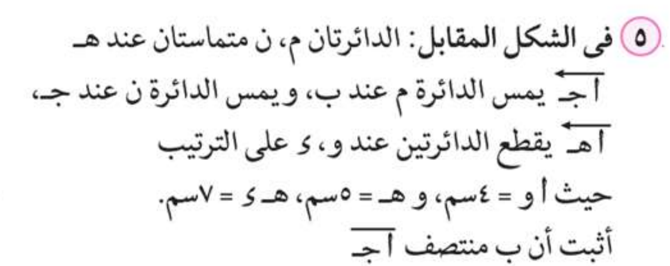
(٢) فى أىٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ى على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

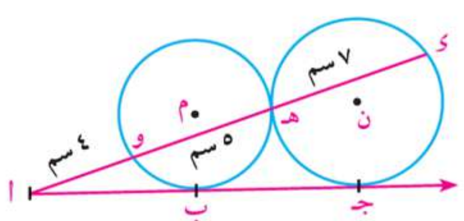


٣ فى أىٍّ من الأشكال التالية $\overline{أب}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ى.



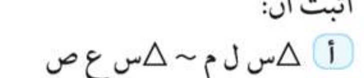
٤ دائرتان متقاطعتان فى أ، ب . جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ رُسِمَ من جـ القطعتان $\overline{جـس}$، $\overline{جـص}$ مماستان للدائرتين عند س، ص. أثبت أن جـ س = جـ ص.



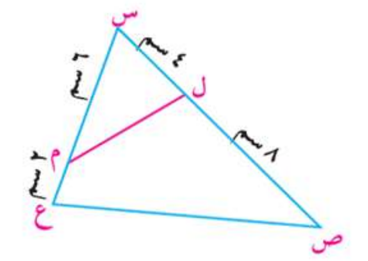


٥ **فى الشكل المقابل:** الدائرتان م، ن متماستان عند هـ
$\overleftrightarrow{أجـ}$ يمس الدائرة م عند ب، ويمس الدائرة ن عند جـ،
$\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرتين عند و، ى على الترتيب
حيث أ و = ٤سم، و هـ = ٥سم، هـ ى = ٧سم.
أثبت أن ب منتصف $\overline{أجـ}$

٦ **فى الشكل المقابل:** ل ∈ $\overline{س ص}$ حيث س ل = ٤سم،
ص ل = ٨سم ، م ∈ $\overline{س ع}$ حيث س م = ٦سم ، ع م = ٢سم
أثبت أن:



أ △س ل م ~ △س ع ص
ب الشكل ل ص ع م رباعى دائرى.



٧ $\overline{أب}$ ∩ $\overline{جـى}$ = {هـ}، أ هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ، ى هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ جـ، إذا كان ب هـ = ٦سم، جـ هـ = ٥سم.
أثبت أن النقط أ، ب، جـ، ى تقع على دائرة واحدة.

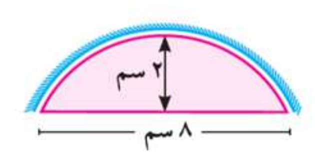
٨ أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ى ب = ٥سم، ى جـ = ٤سم. إذا كان أ جـ = ٦سم. أثبت أن:
أ $\overline{أجـ}$ مماسة للدائرة التى تمر بالنقط أ، ب، ى.
ب △أ جـ ى ~ △ب جـ أ
جـ م (△أ ب ى) : م (△أ ب جـ) = ٥ : ٩

٩ دائرتان متحدتا المركز م، طولا نصفى قطريهما ١٢سم، ٧سم، رسم الوتر $\overline{أى}$ فى الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى فى ب ، جـ على الترتيب. أثبت أن: أ ب × ب ى = ٩٥

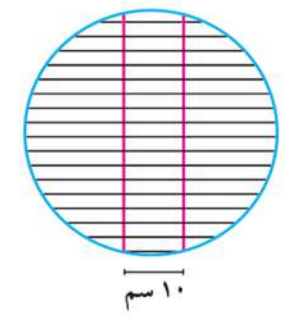
(١٠) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم. رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ، $\overline{\text{أ ء}}$ فى و.

(أ) أثبت أن (أ ب)^٢ = أ و × أ ء. (ب) أوجد طول $\overline{\text{أ و}}$.

(١١) **الربط مع الصناعة:** كُسر أحد تروس آلة ولاستبداله مطلوب معرفة طول نصف قطر دائرته. يبين الشكل المقابل جزءًا من هذا الترس، والمطلوب تعيين طول نصف قطر دائرته



(١٢) **الربط مع البيئة:** يبين الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعْد نافورة المياه عند المدخل جـ.



(١٣) **الربط مع المنزل:** تستخدم هدى شبكة لشى اللحوم على شكل دائرة من السلك، طول قطرها ٥٠سم، يدعمها من الوسط سلكان متوازيان ومتساويان فى الطول كما فى الشكل المقابل، والبعد بينهما ١٠سم.

احسب طول كل من سلكى الدعامة.

(١٤) **الربط مع الاتصال:** تنقل الأقمار الصناعية البرامج التليفزيونية إلى كافة مناطق الأرض، وتستخدم أطباق خاصة لاستقبال إشارات البث التليفزيونى، وهى أطباق مقعرة على شكل جزء من سطح كرة.

يبين الشكل المقابل مقطعًا فى أحد هذه الأطباق، طول قطره ١٨٠سم، والمطلوب حساب طول نصف قطر كرة تقعره $\overline{\text{م أ}}$.

ملخص الوحدة

المضلعان المتشابهان — Two Similar Polygons

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

نسبة التشابه (معامل التشابه) — Similarity Ratio

إذا كان المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ ~ المضلع أ ب جـ ء يكون ك معامل تشابه المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/ للمضلع أ ب جـ ء

حيث $\frac{أ'ب'}{أب} = \frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \frac{جـ'ء'}{جـ ء} = \frac{أ'ء'}{أ ء} =$ ك ، ك $\neq$ ٠.

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى معامل تشابههما

مسلمة: قضية أو عبارة رياضية يسلم بصحتها دون برهان ويستنتج منها حقائق تتعلق بالنظام، مثل: «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرها فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».

نتيجة (١): إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

نتيجة (٢): إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

نظرية ١: إذا تناسبت الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.

نظرية ٢: إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين — The relation between the area of two similar polygons

نظرية ٣: النسبة بين مساحتى سطحين مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

نظرية ٤: النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:









أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.) وحالات خاصة منها.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- يوازي Parallel
- نقطة تنصيف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal
- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى على Perpendicular



دروس الوحدة

الدرس (٣ – ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ – ٢): منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ – ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

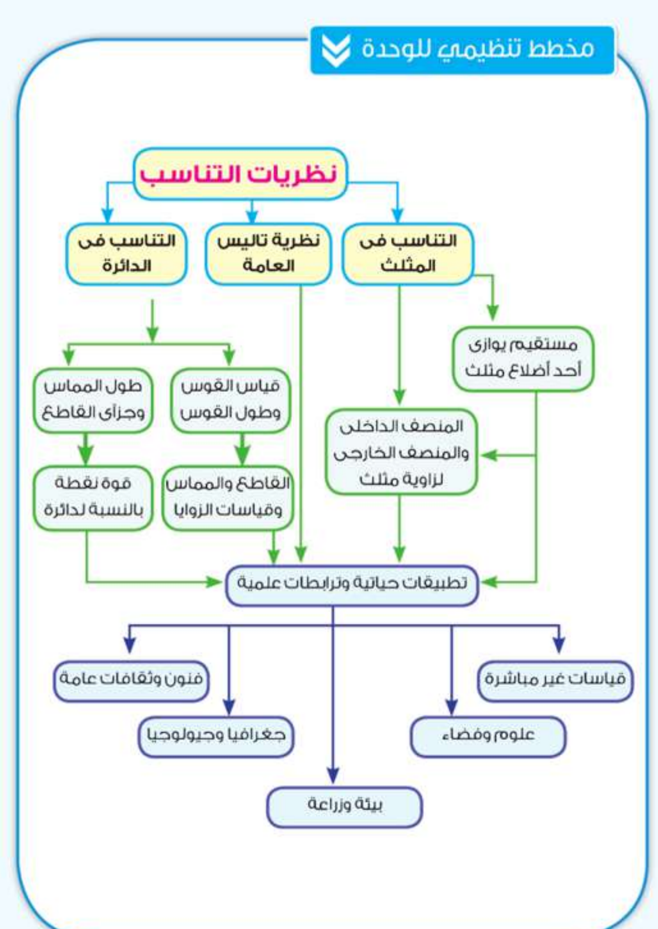
أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات - خيوط - مقص

نبذه تاريخية

الرياضيات نشاط فكرى ممتع يجعل الذهن متفتحًا، والعقل صحوًا، وتُسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حرثوا الأراضى الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاما هندسيًّا متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازى وهى:"من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازى مستقيمًا معلومًا". وتُعْني الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات – المضلعات – الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

مخطط تنظيمي للوحدة



٣ - ١

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيمات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمات المتوازية وقواطعها.

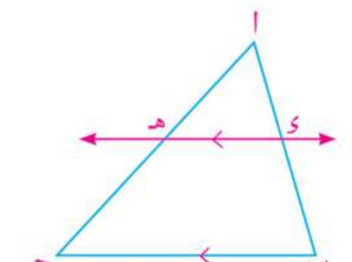
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- يوازى Parallel
- منتصف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.





١- ارسم المثلث ا ب جـ، عين نقطة ء ∈ $\overline{\text{ا ب}}$
ثم ارسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى هـ.

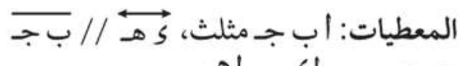
٢- أوجد بالقياس طول كل من:
$\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$، $\overline{\text{ا هـ}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$

٣- احسب النسبتين $\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ب}}$، $\frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ جـ}}$ وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

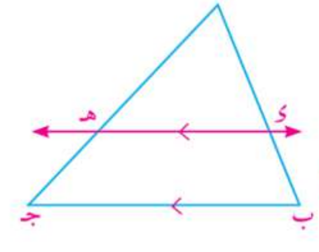
إذا تغير موقع $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{ب جـ}}$.

هل تتغير العلاقة بين $\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ب}}$، $\frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ جـ}}$؟ ماذا نستنتج؟

نظرية ١



إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



المعطيات: ا ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : $\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ جـ}}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △ا ب جـ ~ △ا ء هـ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا هـ}}$ (١)

∵ ء ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ا جـ}}$

∴ ا ب = ا ء + ء ب ، ا جـ = ا هـ + هـ جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{\text{ا ء} + \text{ء ب}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{ا هـ} + \text{هـ جـ}}{\text{ا هـ}}$$

ويكون: $\frac{\text{ا ء}}{\text{ا ء}} + \frac{\text{ء ب}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا هـ}} + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{ا هـ}}$

$$١ + \frac{\text{ء ب}}{\text{ا ء}} = ١ + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{ا هـ}}$$

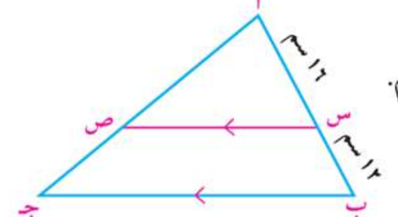
∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{ا هـ}}$

ومن خواص التناسب نجد أن: $\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ جـ}}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن: ∵ $\frac{اى}{ى ب} = \frac{اهـ}{هـ جـ}$ ∴ $\frac{اى + ى ب}{ى ب} = \frac{اهـ + هـ جـ}{هـ جـ}$

أي أن: $\frac{اب}{ى ب} = \frac{اجـ}{هـ جـ}$

مثال



① **فى الشكل المقابل:** $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$، اس = ١٦سم، ب س = ١٢سم.

أ) إذا كان اص = ٢٤سم، أوجد ص جـ.

ب) إذا كان جـ ص = ٢١سم، أوجد اجـ.

الحل

أ) ∵ $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$ ∴ $\frac{اس}{س ب} = \frac{اص}{ص جـ}$

ويكون: $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص جـ}$ ∴ ص جـ $= \frac{١٢ \times ٢٤}{١٦} = ١٨$سم.

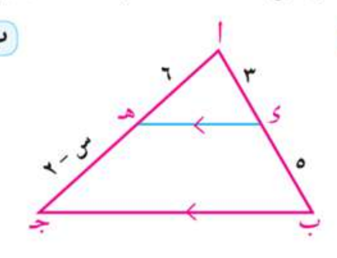
ب) ∵ $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$ ∴ $\frac{اب}{ب س} = \frac{اجـ}{جـ ص}$

ويكون: $\frac{١٦ + ١٢}{١٢} = \frac{اجـ}{٢١}$ ∴ اجـ $= \frac{٢٨ \times ٢١}{١٢} = ٤٩$سم.

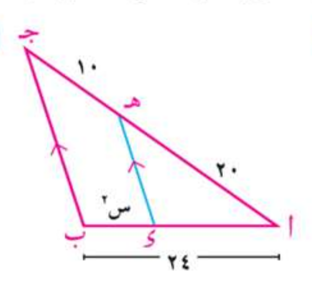
حاول أن تحل

① فى كل من الأشكال التالية: $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

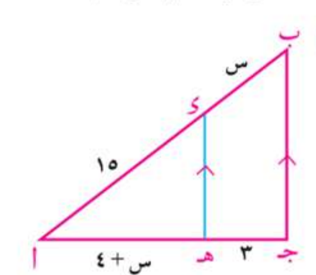
أ)



ب)



جـ)

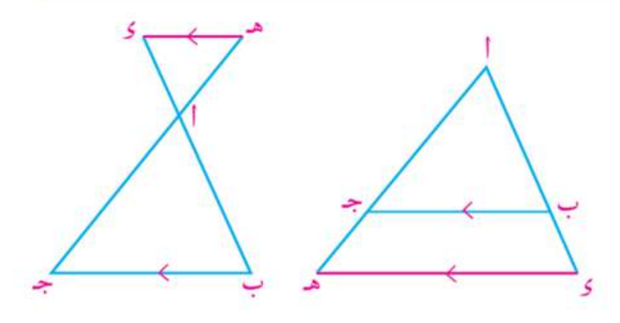


نتيجة

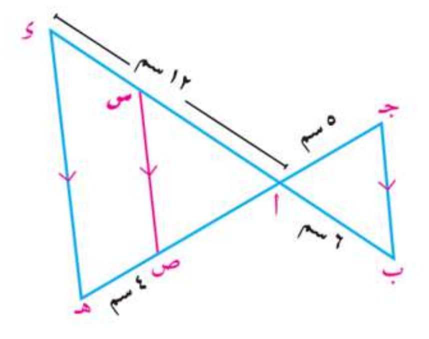
إذا رسم مستقيم خارج مثلث اب جـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث، وليكن $\overline{ب جـ}$، ويقطع $\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{اجـ}$ فى ى، هـ على الترتيب فإن: $\frac{اب}{ب ى} = \frac{اجـ}{جـ هـ}$ (كما فى الشكل).

بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$\frac{اى}{اب} = \frac{اهـ}{اجـ}$ ، $\frac{اى}{ب ى} = \frac{اهـ}{جـ هـ}$



مثال



٢ **في الشكل المقابل:** $\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب ى}} = \{\text{أ}\}$، س $\in \overline{\text{أ ى}}$

ص $\in \overline{\text{أ هـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{هـ ى}}$.

فإذا كان أ ب = ٦سم، أ جـ = ٥سم، أ ى = ١٢سم، هـ ص = ٤سم.

أوجد طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$، $\overline{\text{ى س}}$.

الحل

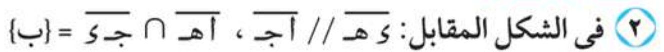
$\because \overline{\text{هـ ى}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}} \cap \overline{\text{ب ى}} = \{\text{أ}\}$

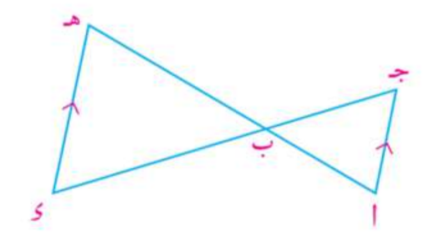
$\therefore \frac{\text{أ ى}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ويكون: $\frac{١٢}{٦} = \frac{\text{أ هـ}}{٥}$ $\therefore$ أ هـ = ١٠سم

في $\triangle$ أ هـ ى:

$\because \overline{\text{س ص}} \,//\, \overline{\text{هـ ى}}$ $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى س}}$

ويكون $\frac{١٠}{٤} = \frac{١٢}{\text{ى س}}$ $\therefore$ ى س = ٤,٨سم





٢ **في الشكل المقابل:** $\overline{\text{ى هـ}} \,//\, \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}} \cap \overline{\text{جـ ى}} = \{\text{ب}\}$

أ إذا كان: أ ب = ٨سم، ب جـ = ٩سم، ب هـ = ١٢سم.

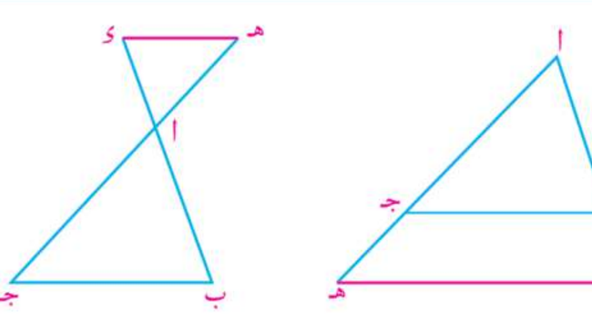
أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$.

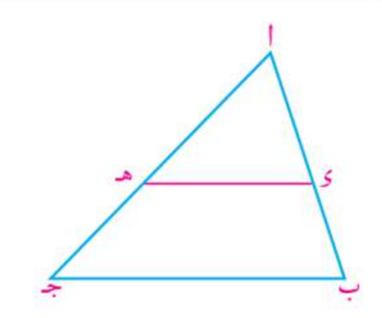
ب إذا كان: أ ب = ٦سم، ب هـ = ٩سم، جـ ى = ١٨سم.

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

عكس نظرية ١

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.





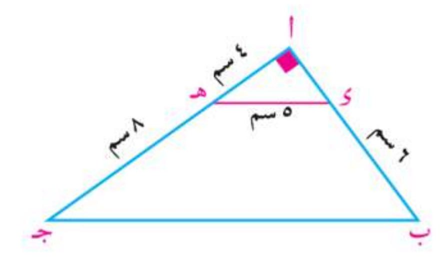
في الأشكال الثلاثة السابقة: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{ى هـ}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في ى، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في هـ. وكان $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{ى هـ}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

تفكير منطقى: هل $\triangle$ أ ى هـ $\sim$ $\triangle$ أ ب جـ؟ ولماذا؟ - هل $\angle$ أ ى هـ $\equiv$ $\angle$ ب ؟ فسر إجابتك.

اكتب برهانًا لعكس النظرية.

مثال



(٣) في الشكل المقابل: ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا

(أ) أثبت أن: $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$. (ب) أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

الحل

(أ) ∵ المثلث ا ى هـ قائم الزاوية في ا

∴ ا ى = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣سم (نظرية فيثاغورث)

∵ $\frac{ا ى}{ى ب} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ا هـ}{هـ جـ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{ا ى}{ى ب} = \frac{ا هـ}{هـ جـ}$ ويكون $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$.

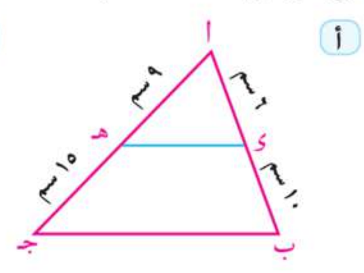
(ب) ∵ △ا ى هـ ~ △ا ب جـ (لماذا) ∴ $\frac{ا ى}{ا ب} = \frac{ى هـ}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$

ويكون $\frac{٥}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$ ∴ ب جـ = ١٥سم

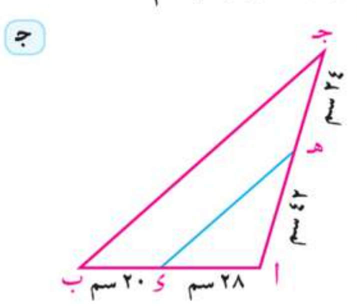
حاول أن تحل

(٣) في كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان $\overline{ى هـ} // \overline{ب جـ}$ أم لا.

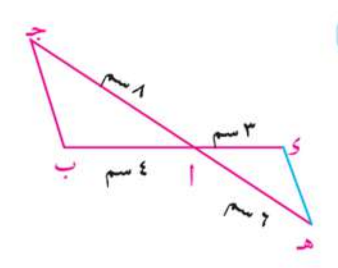
(أ)



(ب)



(جـ)

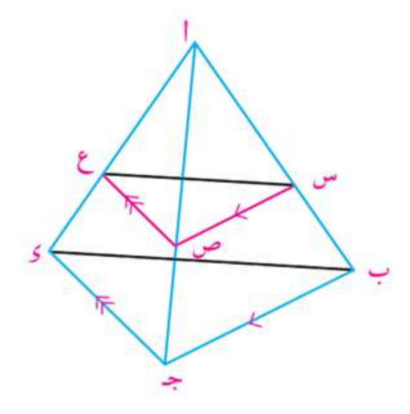


مثال

(٤) ا ب جـ ى شكل رباعي فيه س ∈ $\overline{ا ب}$ ، ص ∈ $\overline{ا جـ}$ حيث $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$،

رسم $\overleftrightarrow{ص ع} // \overline{جـ ى}$ ويقطع $\overline{ا ى}$ في ع. أثبت أن $\overline{س ع} // \overline{ب ى}$.

الحل



في △ا ب جـ:

∵ $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$ ∴ $\frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ص}{ص جـ}$ (١)

في △ا ى جـ:

∵ $\overline{ص ع} // \overline{جـ ى}$ ∴ $\frac{ا ع}{ع ى} = \frac{ا ص}{ص جـ}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن: $\frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ع}{ع ى}$

في △ا ب ى:

∵ $\frac{ا س}{س ب} = \frac{ا ع}{ع ى}$ ∴ $\overline{س ع} // \overline{ب ى}$

حاول أن تحل

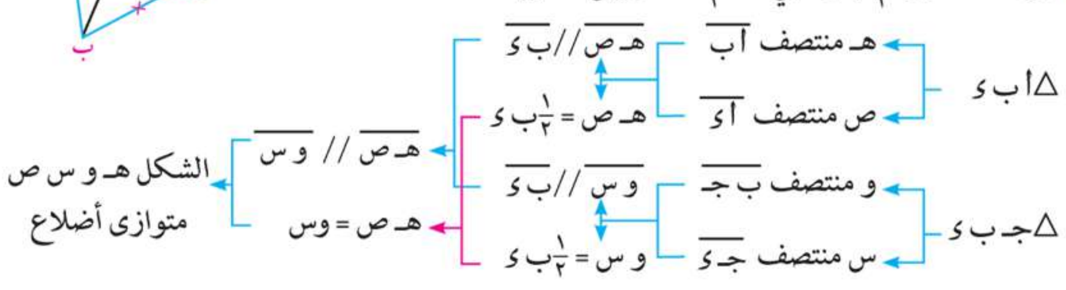
٤ أ ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى م. رسم $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ // $\overline{\text{أ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى و. أثبت أن: $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

تفكير منطقى: إذا كان هـ، و، س، ص منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{ى أ}}$ فى الشكل الرباعى أ ب جـ ى.

هل الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع؟

افهم: ما المطلوب ؟ متى يكون الشكل متوازى أضلاع؟

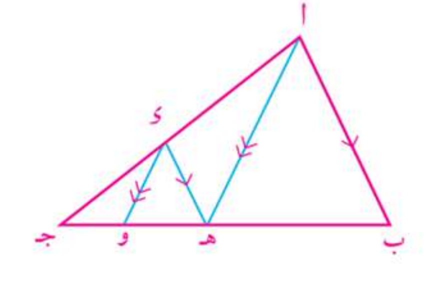
خطط: كون مثلثات برسم $\overline{\text{ب ى}}$ التي تقسم الشكل إلى مثلثين.



حل: اكتب العبارات الرياضية المناسبة للبرهان ومبرراتها.

تحقق: ابحث هل $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ؟ فسِّر إجابتك.

حاول أن تحل



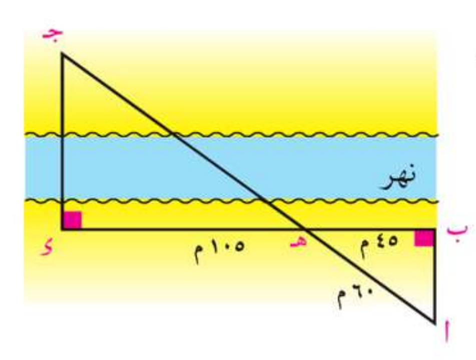
٥ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ى و}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$

ارسم مخططًا يوضح كيفية إثبات أن $(\text{جـ هـ})^2$ = جـ و × جـ ب.

مثال

٥ **تحديد المواقع:** لتحديد الموقع جـ، قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع جـ عن الموقع أ





الحل

$\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ى}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ى}}$ ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ى}}$ = {هـ} ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ى}}$

∴ $\frac{\text{هـ أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب ى}}$ ويكون $\frac{٦٠}{\text{أ جـ}} = \frac{٤٥}{٤٥ + ١٠٥}$

∴ أ جـ = $\frac{٦٠ \times ١٥٠}{٤٥}$ = ٢٠٠ متر.

حاول أن تحل

٦) **مكافحة التلوث:** قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطى كما فى الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.

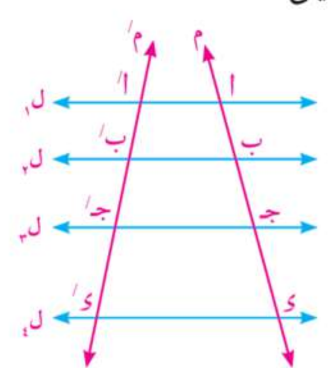




لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازى مستقيم لأحد أضلاع مثلث فى تطبيقات حياتية كثيرة.
يوضح الشكل المقابل بوابة أحد المشاتل الزراعية، وهى مكونه من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها.
هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟

نمذجة

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجًا رياضيًّا للمشكلة) كما يلى:



١- ارسم المستقيمات $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$، م، م' قاطعان لها فى أ، ب، جـ، ى ، أ'، ب'، جـ'، ى' على الترتيب كما بالشكل المقابل.

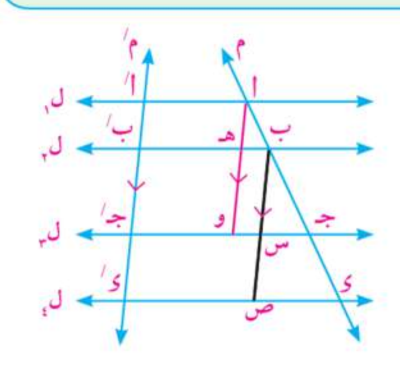
٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

$\frac{أب}{أ'ب'}$ ، $\frac{ب جـ}{ب' جـ'}$ ، $\frac{جـ ى}{جـ' ى'}$ ، $\frac{أ جـ}{أ' جـ'}$ ، ....

ماذا نستنتج؟

نظرية تاليس العامة — Talis' Theorem

> **نظرية ٢**
> إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



المعطيات: $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$ ، م، م' قاطعان لها

المطلوب: أب : ب جـ : جـ ى = أ'ب' : ب'جـ' : جـ'ى'

البرهان: ارسم $\overleftrightarrow{أو} // م'$، ويقطع $ل_٢$ فى هـ ، $ل_٣$ فى و، $\overleftrightarrow{ب ص} // م'$، ويقطع $ل_٣$ فى س، $ل_٤$ فى ص.

∵ $\overline{أأ'} // \overline{هـ ب'}$ ، $\overline{أهـ} // \overline{أ'ب'}$

∴ أ هـ ب' أ' متوازى أضلاع ويكون: أ هـ = أ' ب'

بالمثل: هـو = ب′جـ′ ، ب س = ب′جـ′ ، س ص = جـ′ى′

فى △ا جـ و:

∵ $\overline{\text{بهـ}}$ // $\overline{\text{جـو}}$ ∴ $\frac{\text{اب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{هـو}}$

ويكون: $\frac{\text{اب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{ا′ب′}}{\text{ب′جـ′}}$ ، $\frac{\text{اب}}{\text{ا′ب′}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{ب′جـ′}}$ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل △ب ى ص:

∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{جـى}} = \frac{\text{ب′جـ′}}{\text{جـ′ى′}}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{ب′جـ′}} = \frac{\text{جـى}}{\text{جـ′ى′}}$ (إبدال الوسطين) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{اب}}{\text{ا′ب′}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{ب′جـ′}} = \frac{\text{جـى}}{\text{جـ′ى′}}$

∴ اب : بجـ : جـى = ا′ب′ : ب′جـ′ : جـ′ى′ وهو المطلوب.

حاول أن تحل

٧ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل السابق:

أ $\frac{\text{اجـ}}{\text{جـى}}$ ب $\frac{\text{اجـ}}{\text{جـب}}$ ج $\frac{\text{بى}}{\text{ىا}}$ د $\frac{\text{ا′ى′}}{\text{ا′ب′}}$ هـ $\frac{\text{اب}}{\text{ا′ب′}}$

مثال

٦ فى الشكل المقابل: $\overline{\text{اب}}$ // $\overline{\text{جـى}}$ // $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ،

اجـ = ٢٨سم، جـهـ = ٢٠سم، ى و = ١٥سم، و ص = ٣٣سم.

أوجد طول كل من: $\overline{\text{بى}}$ ، $\overline{\text{هـس}}$

الحل

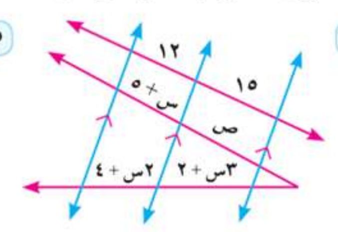
∵ $\overline{\text{اب}}$ // $\overline{\text{جـى}}$ // $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

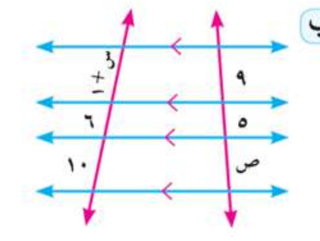
∴ $\frac{\text{اجـ}}{\text{بى}} = \frac{\text{جـهـ}}{\text{ى و}} = \frac{\text{هـس}}{\text{و ص}}$

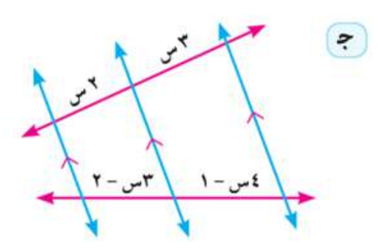
$\frac{٢٨}{\text{بى}} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{\text{هـس}}{٣٣}$ ∴ بى = ٢١سم ، هـس = ٤٤سم.

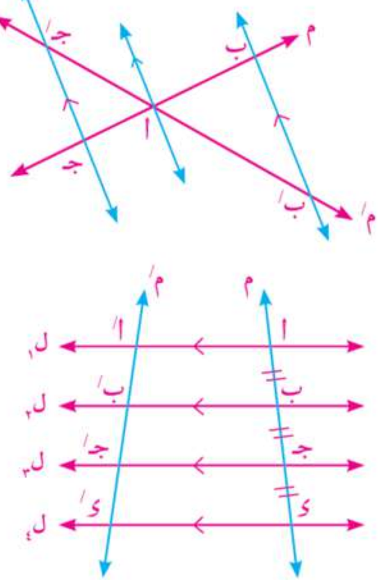
حاول أن تحل

٨ فى كل من الأشكال التالية، المستقيمات الحمراء تقطع مستقيمات متوازية. احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ


ب


ج




حالات خاصة

١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ

وكان: ب ب/ // جـ جـ/ ، فإن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}^/}{\text{أ جـ}^/}$

وبالعكس: إذا كان: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}^/}{\text{أ جـ}^/}$

فإن: ب ب/ // جـ جـ/

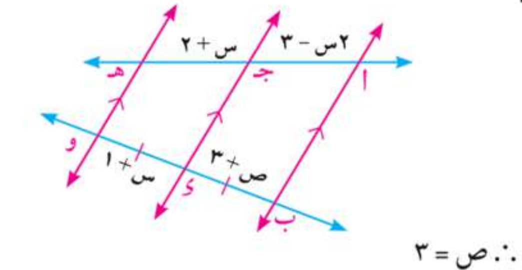
نظرية تاليس الخاصة

٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

فى الشكل المقابل ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤، قطعها المستقيمان م، م/

وكان: أ ب = ب جـ = جـ ى فإن: أ/ ب/ = ب/ جـ/ = جـ/ ى/

مثال



(٧) **فى الشكل المقابل** أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.

الحل

∵ أ ب // جـ ى // هـ و ، ب ى = ى و

∴ أ جـ = جـ هـ

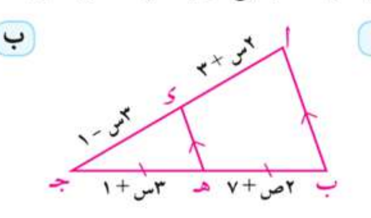
ويكون: ٢س - ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

∵ ب ى = ى و ، س = ٥ ∴ ص + ٣ = ٥ + ١ ∴ ص = ٣

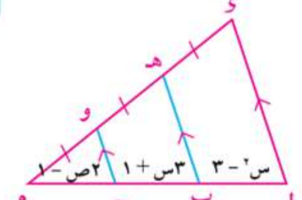
حاول أن تحل

(٩) فى كل مما يأتى أوجد قيمة س، ص العددية. (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

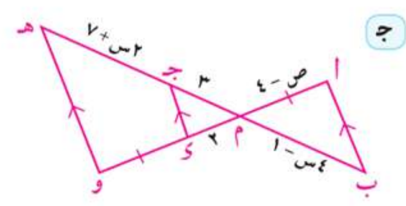
أ



ب



جـ



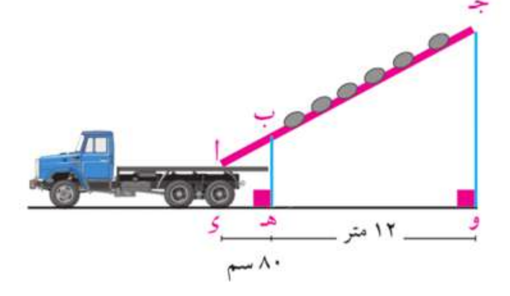
فكر

أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعها على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ، ب.

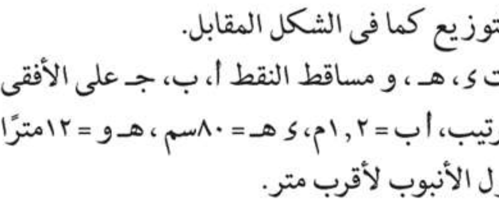
هل تقسيم يوسف للشريط صحيحًا؟ فسر إجابتك.

استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.

مثال



٨ **الربط بالصناعة:** تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.



فإذا كانت ى، هـ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى بنفس الترتيب، أب = ١,٢م، ى هـ = ٨٠سم، هـ و = ١٢مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.



الحل

∵ ى، هـ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى ∴ $\overline{أى} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{جـ و}$

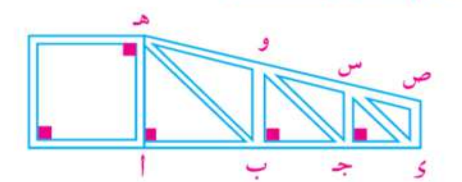
∵ $\overline{أى} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{جـ و}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ى و}$ قاطعان لها ∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{ى و}{ى هـ}$

ويكون: $\frac{أجـ}{١,٢} = \frac{١٢ + ٠,٨}{٠,٨}$

∴ أجـ = $\frac{١٢,٨ \times ١,٢}{٠,٨}$ = ١٩,٢ مترًا ∴ أجـ ≃ ١٩ مترًا

حاول أن تحل

١٠ أ **الربط بالإنشاءات:**



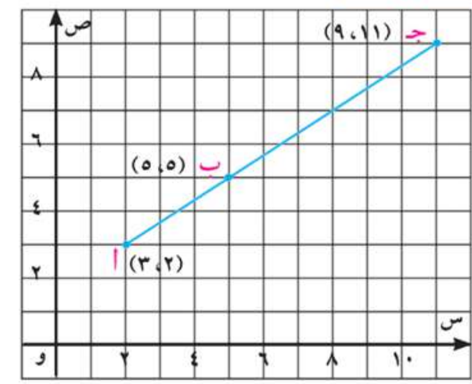
إذا كان أب = ١٨٠سم، هـ و = ٢متر

أب : ب جـ : جـ ى = ٥ : ٤ : ٣

أوجد طول كل من $\overline{هـ ص}$، $\overline{جـ ى}$



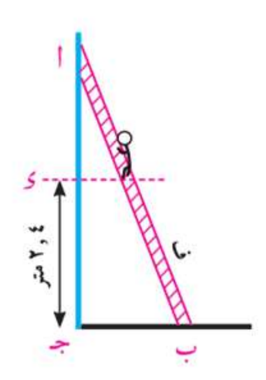
ب **تفكير ناقد**



أوجد من الشكل $\frac{أب}{ب جـ}$ بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

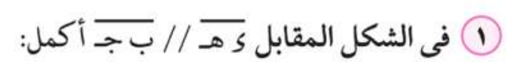
تحقق من فهمك

حل مشكلات: أب سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠سم. فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤متر من الأرض.

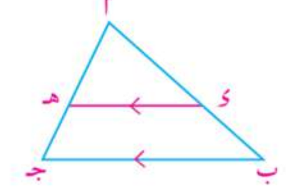





تمارين ٣ - ١



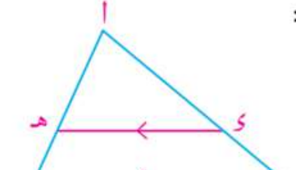
١) في الشكل المقابل $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ أكمل:



أ) إذا كان $\frac{\text{ا ى}}{\text{ى ب}} = \frac{٥}{٣}$ فإن: $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ا}} = \frac{......}{......}$

ب) إذا كان $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا جـ}} = \frac{٤}{٧}$ فإن: $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ا}} = \frac{......}{......}$ ، $\frac{\text{ب ى}}{\text{ا ب}} = \frac{......}{......}$

٢) في الشكل المقابل $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$. حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:



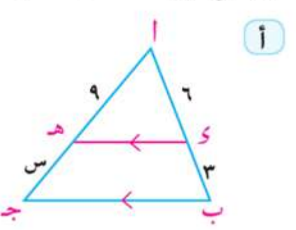
أ) $\frac{\text{ا ب}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ب) $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{هـ جـ}}$

جـ) $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا هـ}}$ د) $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{جـ هـ}}$

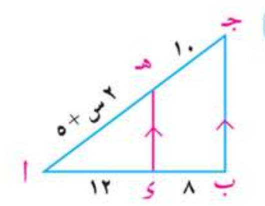
هـ) $\frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ى}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا هـ}}$ و) $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ب}}$

٣) في كل من الأشكال التالية $\overline{\text{ى هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

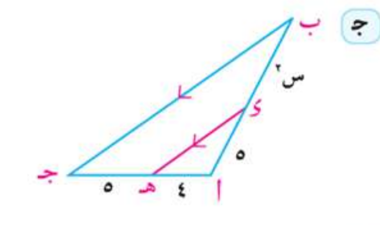
أ)



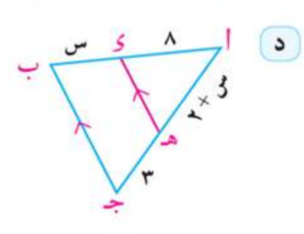
ب)



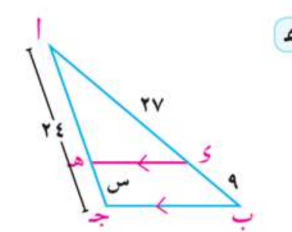
جـ)



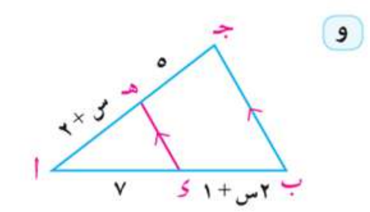
د)



هـ)



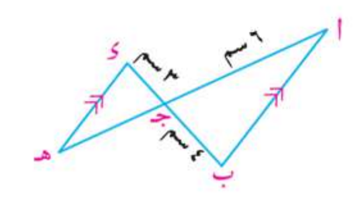
و)



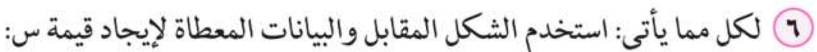
٤) في الشكل المقابل: $\overline{\text{ا ب}} \parallel \overline{\text{ى هـ}}$ ، $\overline{\text{ا هـ}} \cap \overline{\text{ب ى}} = \{\text{جـ}\}$

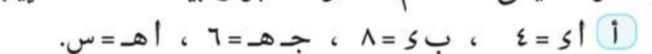
ا جـ = ٦سم، ب جـ = ٤سم، جـ ى = ٣سم

أوجد طول $\overline{\text{جـ هـ}}$



٥) س ص ∩ ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩سم، ص م = ١٥سم، ع ل = ٣٦ سم.
أوجد طول ع م.

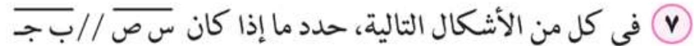

٦) لكل مما يأتى: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

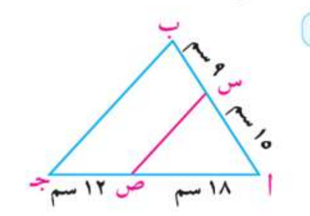

أ) ا ى = ٤ ، ب ى = ٨ ، جـ هـ = ٦ ، ا هـ = س.

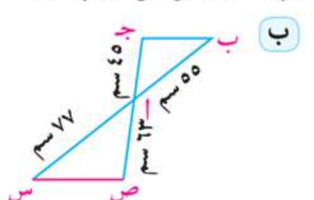
ب) ا هـ = س ، هـ جـ = ٥ ، ا ى = س - ٢ ، ى ب = ٣.

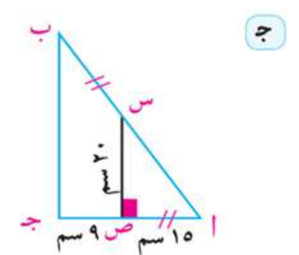
جـ) ا ب = ٢١ ، ب و = ٨ ، و جـ = ٦ ، ا ى = س.

د) ا ى = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ى ب = ٣و جـ = ١٢.


٧) فى كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ







٨) س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤سم، س ع = ٢١سم، ل ∈ س ص بحيث س ل = ٥,٦سم،
م ∈ س ع حيث س م = ٨,٤سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩) فى المثلث ا ب جـ، ى ∈ ا ب ، هـ ∈ ا جـ، ٥ا هـ = ٤ هـ جـ.
إذا كان ا ى = ١٠ سم، ى ب = ٨سم. حدد ما إذا كان ى هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠) ا ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ. فإذا كان ا هـ = ٦سم، ب هـ = ١٣سم، هـ و = ١٠سم،
هـ ى = ٧,٨سم. أثبت أن الشكل ا ب جـ ى شبه منحرف.

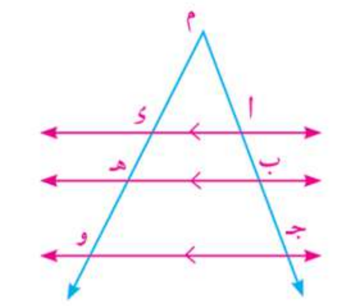
١١) أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى ضلعه الثالث، وطولها يساوى
نصف طول هذا الضلع.

١٢) ا ب جـ مثلث، ى ∈ ا ب حيث ٣ا ى = ٢ ى ب، هـ ∈ ا جـ حيث ٥ جـ هـ = ٣ ا جـ، رسم ا س يقطع ب جـ
فى س. إذا كان ا و = ٨سم، ا س = ٢٠سم، حيث و ∈ ا س. أثبت أن النقط ى، و، هـ على استقامة واحدة.

١٣) ا ب جـ مثلث، ى ∈ ب جـ، بحيث $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ ا ى ، بحيث $\frac{ا هـ}{ا ى} = \frac{٣}{٧}$، رسم جـ هـ فقطع ا ب فى س،
رسم ى ص // جـ س فقطع ا ب فى ص. أثبت أن ا س = ب ص.

١٤) ا ب جـ ى مستطيل تقاطع قطراه فى م. هـ منتصف ا م ، و منتصف م جـ. رسم ى هـ يقطع ا ب فى س،
ورسم ى و يقطع ب جـ فى ص. أثبت أن: س ص // ا جـ.

١٥ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل:



أ) $\frac{\text{اب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{ىهـ}}{\text{.......}}$　　ب) $\frac{\text{اجـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{.......}}{\text{هـو}}$

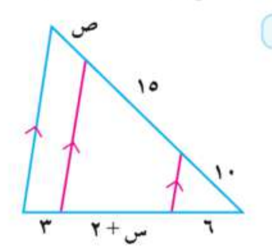
جـ) $\frac{\text{ما}}{\text{اب}} = \frac{\text{مى}}{\text{.......}}$　　د) $\frac{\text{اجـ}}{\text{اب}} = \frac{\text{.......}}{\text{ىهـ}}$

هـ) $\frac{\text{مب}}{\text{اب}} = \frac{\text{.......}}{\text{ىهـ}}$　　و) $\frac{\text{مجـ}}{\text{اجـ}} = \frac{\text{مو}}{\text{.......}}$

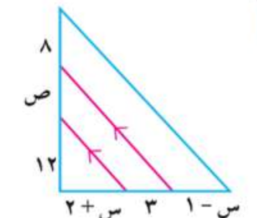
ز) $\frac{\text{بجـ}}{\text{مب}} = \frac{\text{هـو}}{\text{.......}}$　　ح) $\frac{\text{ىو}}{\text{مو}} = \frac{\text{اجـ}}{\text{.......}}$

١٦ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

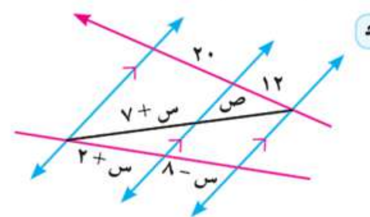
أ)



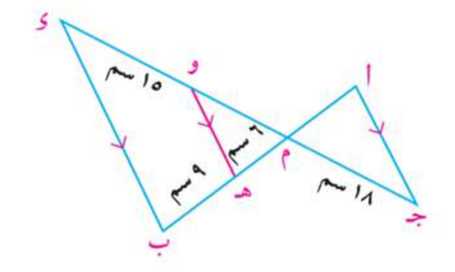
ب)



جـ)



١٧ فى الشكل المقابل:



$\overline{\text{اب}} \cap \overline{\text{جـى}} = \{\text{م}\}$، هـ $\in \overline{\text{مب}}$ ،

و $\in \overline{\text{مى}}$ ، $\overline{\text{اجـ}} // \overline{\text{وهـ}} // \overline{\text{ىب}}$

أوجد:

أ) طول $\overline{\text{مو}}$

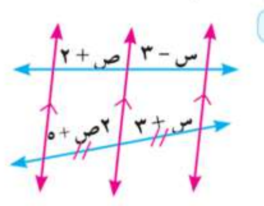
ب) طول $\overline{\text{ام}}$

١٨ $\overleftrightarrow{\text{اب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـى}} = \{\text{هـ}\}$، س $\in \overline{\text{اب}}$ ، ص $\in \overline{\text{جـى}}$ ، وكان $\overline{\text{سص}} // \overline{\text{بى}} // \overline{\text{اجـ}}$

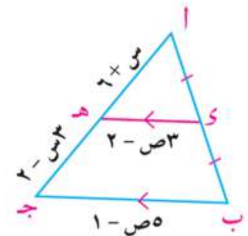
أثبت أن: اس × هـى = جـص × هـب

١٩ فى كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:

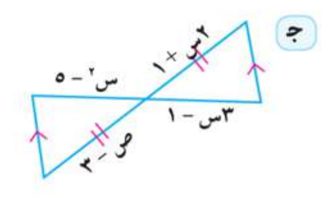
أ)



ب)



جـ)



٢٠ ا ب جـ ى شكل رباعى فيه $\overline{\text{اب}} // \overline{\text{جـى}}$ ، تقاطع قطراه فى م، نصف $\overline{\text{بجـ}}$ فى هـ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـو}} // \overline{\text{با}}$، ويقطع $\overline{\text{بى}}$ فى س ، $\overline{\text{اجـ}}$ فى ص ، $\overline{\text{اى}}$ فى و.

أثبت أن:

أ) هـص = $\frac{1}{2}$ اب.　　ب) $\frac{\text{اص}}{\text{جـم}} = \frac{\text{بس}}{\text{ىم}}$

٣ - ٢ منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

Angle Bisectors and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية فى مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى Perpendicular

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم .
- حاسب آلى وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.



١- ارسم المثلث أ ب جـ، وإرسم $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ليقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.

٢- قس كلًّا من $\overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.

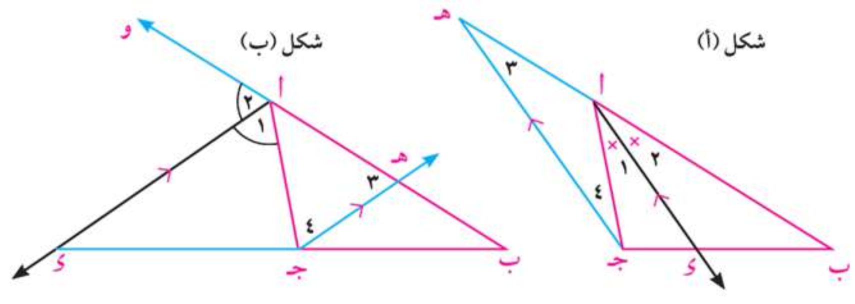
٣- احسب كل من النسبتين $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$، $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟

٤- كرر العمل السابق عدة مرات.
هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

منصف زاوية مثلث Bisector of an Angle of a Triangle

نظرية ٣

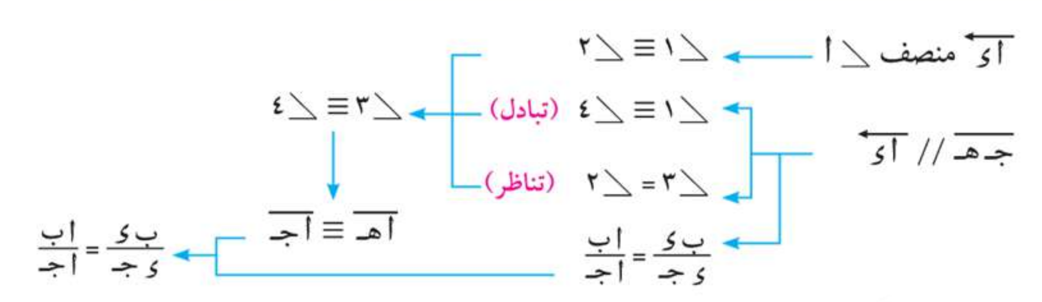
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزآين فإن النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين



المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ
(من الداخل فى شكل أ ، من الخارج فى شكل ب).

المطلوب : $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$

البرهان : ارسم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ويقطع $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ فى هـ. اتبع المخطط التالى واكتب البرهان.



مثال

① ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨سم ، ا جـ = ٦سم ، ب جـ = ٧سم ، رسم $\overleftarrow{اى}$ ينصف ∠ب ا جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في ى. أوجد طول كل من $\overline{ب ى}$ ، $\overline{ى جـ}$

الحل

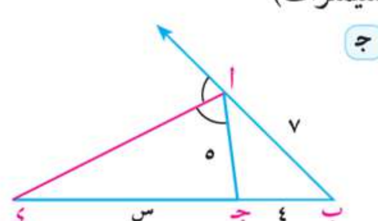
∵ $\overleftarrow{اى}$ ينصف ∠ ب ا جـ ∴ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{اب}{اجـ}$ (نظرية)

∵ ا ب = ٨سم، ا جـ = ٦سم ∴ $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∵ ب جـ = ب ى + ى جـ = ٧سم ∴ $\frac{ب ى}{٧ - ب ى} = \frac{٤}{٣}$

٣ب ى = ٢٨ - ٤ ب ى (ضرب تبادلي)

٧ب ى = ٢٨ ∴ ب ى = ٤سم ، جـ ى = ٣سم



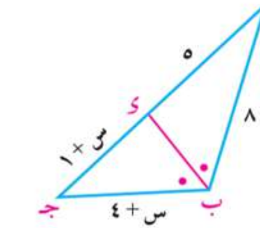

حاول أن تحل

① في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ

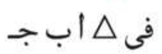
ب

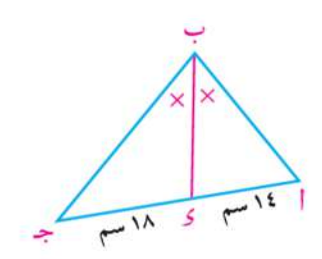
ج



مثال

② ا ب جـ مثلث. رسم $\overleftarrow{ب ى}$ ينصف ∠ب ، ويقطع $\overline{اجـ}$ في ى، حيث اى = ١٤سم، ى جـ = ١٨سم. إذا كان محيط △ ا ب جـ = ٨٠سم، فأوجد طول كل من: $\overline{ب جـ}$، $\overline{اب}$.


الحل



في △ ا ب جـ

∵ $\overleftarrow{ب ى}$ ينصف ∠ب ∴ $\frac{اب}{ب جـ} = \frac{اى}{ى جـ}$

∴ $\frac{اب}{ب جـ} = \frac{١٤}{١٨} = \frac{٧}{٩}$

∵ محيط △ ا ب جـ = ٨٠سم، ا جـ = ١٤ + ١٨ = ٣٢سم

∴ ا ب + ب جـ = ٨٠ - ٣٢ = ٤٨سم

∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{7}{9}$ ∴ $\frac{\text{ا ب + ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{7+9}{9}$ (خواص التناسب)

ويكون $\frac{48}{\text{ب جـ}} = \frac{16}{9}$ ∴ ب جـ = ٢٧سم ، ا ب = ٢١سم

حاول أن تحل

(٢) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب. رسم $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ا، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.
إذا كان طول $\overline{\text{ب ى}}$ = ٢٤سم، ب ا : ا جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ ا ب جـ.

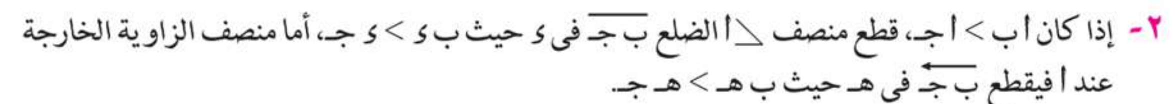
ملاحظة هامّة

١- فى المثلث ا ب جـ حيث ا ب ≠ ا جـ:
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ب ا جـ،
$\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند ا.

فإن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

و يكون $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

أى أن $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل فى ى ومن الخارج فى هـ بنسبة واحدة
ويكون المنصفين $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ متعامدين . (لماذا)؟



٢- إذا كان ا ب > ا جـ، قطع منصف ∠ا الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى حيث ب ى > ى جـ، أما منصف الزاوية الخارجة عند ا فيقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ حيث ب هـ > هـ جـ.

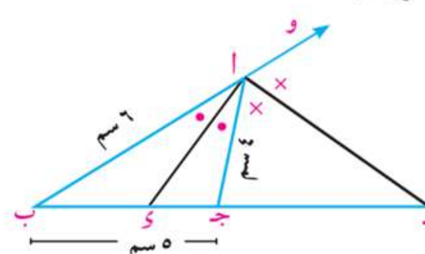
تفكير ناقد

- كلما كبر ا جـ ماذا يحدث للنقطة ى؟
- إذا كان ا جـ = ا ب أين تقع النقطة ى؟ وما وضع $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ بالنسبة إلى $\overline{\text{ب جـ}}$ عندئذٍ؟
- عندما يصبح ا جـ > ا ب ما العلاقة بين ى جـ، ى ب؟ وأين تقع هـ عندئذٍ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

(٣) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٦سم، ا جـ = ٤سم ، ب جـ = ٥سم. رسم $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ا و يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى،
ورسم $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ينصف ∠ا الخارجة و يقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. احسب طول $\overline{\text{ى هـ}}$.

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ا، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ينصف ∠ا الخارجة
∴ ى، هـ تقسمان $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

أي أن: $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

∵ ب جـ = ب ى + ى جـ = ٥ ، ب هـ - هـ جـ = ب جـ = ٥

من خواص التناسب نجد

$\frac{\text{ب ى + ى جـ}}{\text{ى جـ}} = \frac{٣ + ٢}{٢}$ $\frac{٥}{\text{ى جـ}} = \frac{٥}{٢}$ ∴ ى جـ = ٢

$\frac{\text{ب هـ - هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٣ - ٢}{٢}$ $\frac{٥}{\text{هـ جـ}} = \frac{١}{٢}$ ∴ هـ جـ = ١٠

ويكون ى هـ = ى جـ + جـ هـ   ى هـ = ٢ + ١٠ = ١٢سم

حاول أن تحل

(٣) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٣سم، ب جـ = ٧سم، جـ ا = ٦سم. رسم $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ ا، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى، ورسم $\overline{\text{ا هـ}}$ ينصف ∠ ا الخارجة ويقطع $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فى هـ.

أ) أثبت أن $\overline{\text{ا ب}}$ متوسط فى المثلث ا جـ هـ.

ب) أوجد النسبة بين مساحة المثلث ا ى هـ، و مساحة المثلث ا جـ هـ.

إيجاد طول المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.

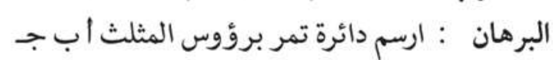
تمرين مشهور

إذا كان $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ ا في △ ا ب جـ من الداخل ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى

فإن: ا ى = $\sqrt{\text{ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ}}$

المعطيات: ا ب جـ مثلث، $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ب ا جـ من الداخل، $\overrightarrow{\text{ا ى}} \cap \overline{\text{ب جـ}}$ = {ى}

المطلوب: $(\text{ا ى})^٢$ = ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ



البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث ا ب جـ

وتقطع $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ في هـ، ارسم $\overline{\text{ب هـ}}$

فيكون: △ ا جـ ى ~ △ ا هـ ب (لماذا)؟، $\frac{\text{ا ى}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا هـ}}$

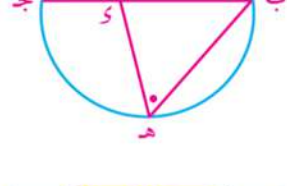
∴ ا ى × ا هـ = ا ب × ا جـ

ا ى × (ا ى + ى هـ) = ا ب × ا جـ

$(\text{ا ى})^٢$ = ا ب × ا جـ - ا ى × ى هـ

$(\text{ا ى})^٢$ = ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ

أي أن: ا ى = $\sqrt{\text{ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ}}$



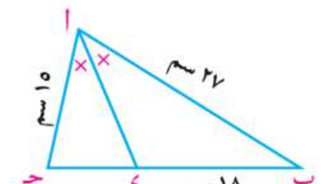
تذكر

ا ى × ى هـ = ب ى × ى جـ

مثال

(٤) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٢٧سم، ا جـ = ١٥سم. رسم $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ا ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى.

إذا كان ب ى = ١٨سم احسب طول $\overline{\text{ا ى}}$.



الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ب ا جـ ∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$

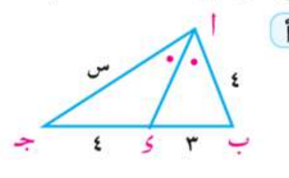
ويكون $\frac{١٨}{\text{ى جـ}} = \frac{٢٧}{١٥}$ ∴ ى جـ = ١٠سم

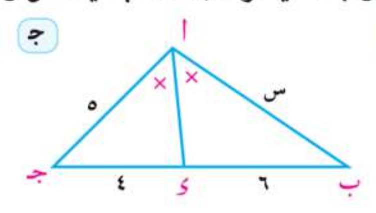
∵ ا ى = $\sqrt{\text{ا ب × ا جـ - ب ى × ى جـ}}$

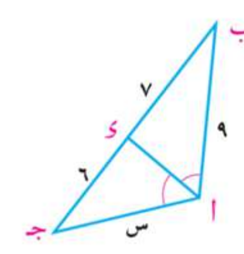
∴ ا ى = $\sqrt{٢٧ × ١٥ - ١٨ × ١٠} = \sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

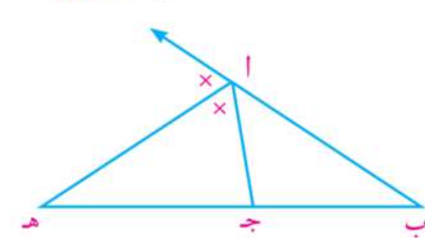
حاول أن تحل

(٤) فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{اى}$







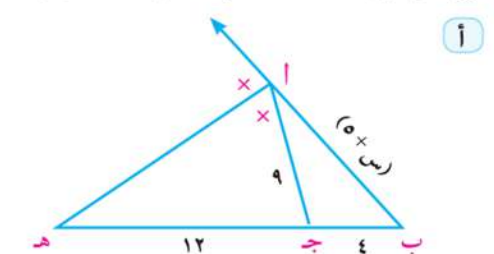


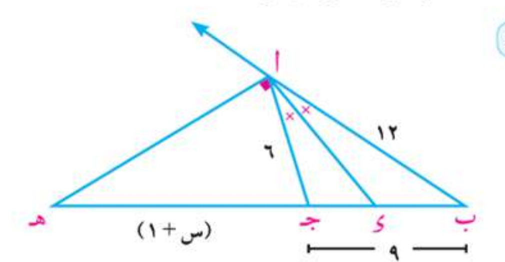
لاحظ أن: فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{اهـ}$ ينصف ∠ ب ا جـ من الخارج

ويقطع $\overleftrightarrow{بجـ}$ فى هـ. فإن: ا هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{ا ب} \times \text{ا جـ}}$

حاول أن تحل

(٥) فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س، وطول $\overline{اهـ}$





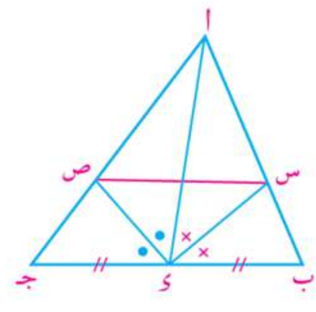


(٥) **فى الشكل المقابل:** $\overline{اى}$ متوسط فى △ ا ب جـ

$\overleftrightarrow{ى س}$ ينصف ∠ا ى ب. ويقطع $\overline{اب}$ فى س.

$\overleftrightarrow{ى ص}$ ينصف ∠ا ى جـ ويقطع $\overline{اجـ}$ فى ص.

أثبت أن: $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$.



الحل

فى △ا ى ب: ∵ $\overleftrightarrow{ى س}$ ينصف ∠ا ى ب ∴ $\frac{\text{ا ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ا س}}{\text{س ب}}$ (١)

فى △ا ى جـ: ∵ $\overleftrightarrow{ى ص}$ ينصف ∠ا ى جـ ∴ $\frac{\text{ا ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ا ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

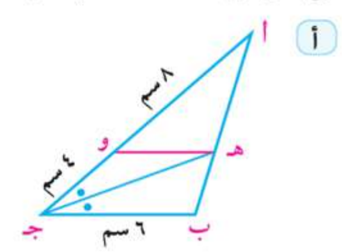
فى △ا ب جـ: ∵ $\overline{اى}$ متوسط ∴ ى ب = ى جـ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) $\frac{\text{ا س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ا ص}}{\text{ص جـ}}$ ويكون $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$.

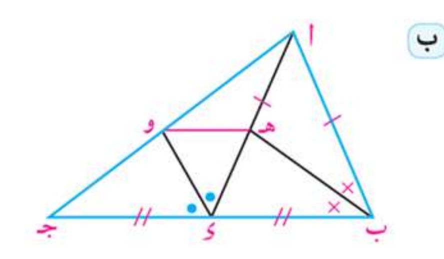
حاول أن تحل

٦ في كل من الأشكال التالية أثبت أن: $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$

أ



ب



تفكير منطقي

في الشكل المقابل: ء ∈ $\overline{ب جـ}$.

كيف يمكن رسم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ يقطع $\overrightarrow{ب أ}$ في هـ لحساب النسبة $\frac{ب ء}{ء جـ}$؟

إذا كان $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$ ماذا نستنتج؟

حالات خاصة

١- في △ أ ب جـ:

إذا كان ء ∈ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

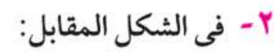
فإن: $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ جـ

وإذا كان هـ ∈ $\overleftrightarrow{ب جـ}$، هـ ∉ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$

فإن: $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠أ الخارجة عن المثلث أ ب جـ

ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- **في الشكل المقابل:**



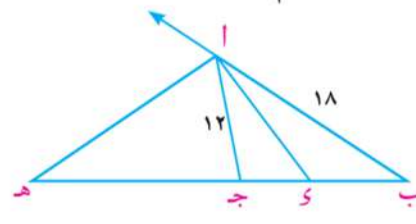
$\overrightarrow{ب هـ}$، $\overrightarrow{جـ هـ}$ منصفا زاويتا ب، جـ

يتقاطعا في نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{أ ء}$. ماذا تستنتج؟

حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

مثال

٦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٨سم، ب جـ = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم، ء ∈ $\overline{ب جـ}$، حيث ب ء = ٩سم رسم $\overrightarrow{أ هـ}$ ⊥ $\overrightarrow{أ ء}$ فقطع $\overrightarrow{ب جـ}$ في هـ. أثبت أن $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ب أ جـ ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$.



الحل

في △ أ ب جـ: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

جـ ء = ب جـ − ب ء = ١٥ − ٩ = ٦سم

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب أ}{أ جـ}$ $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ب أ جـ

∵ $\overleftrightarrow{\text{اهـ}} \perp \overline{\text{اى}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ

∴ $\overleftrightarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ا الخارجة عن △ ا ب جـ ويكون $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{اب}}{\text{اجـ}}$

∵ ب هـ = ب جـ + جـ هـ ∴ $\frac{15 + \text{جـ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{18}{12}$ جـ هـ = ٣٠سم

حاول أن تحل

(٧) ا ب جـ ى شكل رباعى فيه ا ب = ١٨سم، ب جـ = ١٢سم. هـ ∈ $\overline{\text{اى}}$ بحيث ٢ ا هـ = ٣ هـ ى رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ى جـ}}$ فقطع $\overline{\text{اجـ}}$ فى و. أثبت أن $\overrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ا ب جـ.

مثال

(٧) $\overline{\text{اب}}$ قطر فى دائرة، $\overline{\text{اجـ}}$ وتر فيها. رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ مماس للدائرة عند جـ فقطع $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ فى ى.

إذا كانت هـ ∈ $\overline{\text{اب}}$ بحيث $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ أثبت أن:

(أ) $\overleftrightarrow{\text{اجـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ى هـ عند جـ. (ب) $\frac{\text{ى ا}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ب هـ}}$

الحل

∵ $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (١)

∴ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ ينصف ∠ جـ فى △ ى جـ هـ.

∵ $\overline{\text{اب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ا جـ ب) = ٩٠° ويكون $\overleftrightarrow{\text{جـ ا}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$

∵ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ ينصف ∠جـ فى △ ا ب جـ

∴ $\overrightarrow{\text{جـ ا}}$ منصف للزاوية الخارجة عند جـ (منصفا الزاوية متعامدان) (وهو المطلوب أولًا)

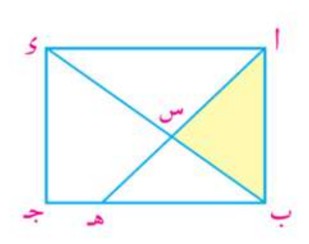
ويكون $\frac{\text{ى ا}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{ى ا}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ى ا}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ب هـ}}$ (وهو المطلوب ثانيًا)

حاول أن تحل

(٨) دائرتان م، ن متماستان من الخارج فى ا. رسم مستقيم يوازى $\overline{\text{م ن}}$ فقطع الدائرة م فى ب، جـ، والدائرة ن فى ى، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع $\overrightarrow{\text{ب م}}$، $\overrightarrow{\text{هـ ن}}$ فى النقطة و. أثبت أن $\overrightarrow{\text{ا و}}$ ينصف ∠م و ن.

تحقق من فهمك

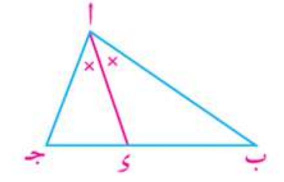


حل مشكلات: يبين **الشكل المقابل** تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$، حيث هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{ب ى}} \cap \overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ = {س}.

فإذا كان ا ب = ب هـ = ٤٢مترًا، ا ى = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة ا ب س بالأمتار المربعة و طول $\overline{\text{ا س}}$



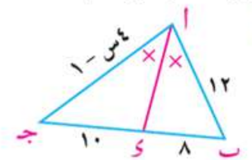


١) في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف ∠أ. أكمل:

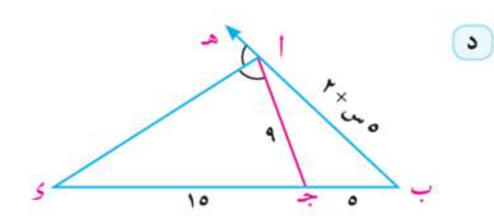
أ) $\frac{ب ى}{ى جـ}$ = ...
ب) $\frac{أ جـ}{أ ب}$ = ...
جـ) $\frac{ب ى}{ب أ}$ = ...
د) أ ب × جـ ى = ...

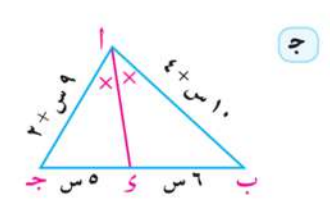
٢) في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

أ)
ب)



جـ)
د)

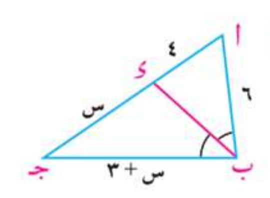


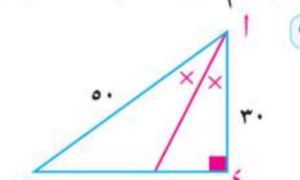


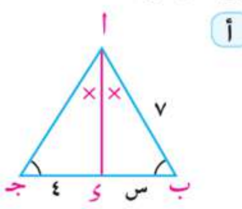
٣) أ ب جـ مثلث محيطه ٢٧سم، رسم $\overleftrightarrow{ب ى}$ ينصف ∠ب ويقطع $\overline{أ جـ}$ في ى.
إذا كان أ ى = ٤سم، جـ ى = ٥سم، أوجد طول كل من $\overline{أ ب}$، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ ى}$

٤) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ثم أوجد محيط △أ ب جـ.

أ)
ب)
جـ)



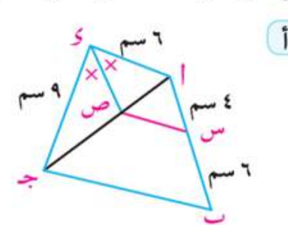




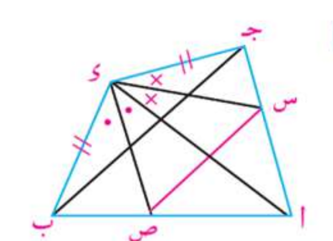
٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٤سم، ب جـ = ٦سم، رسم $\overleftrightarrow{أى}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في ى، ورسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ في هـ أوجد طول كل من $\overline{ى هـ}$، $\overline{أى}$، $\overline{أهـ}$.

٦ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أ

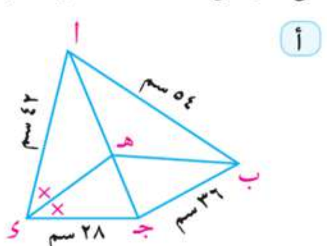


ب

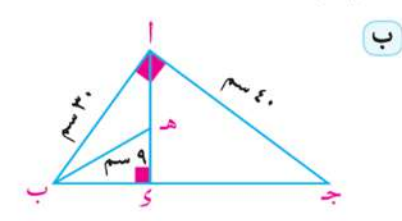


٧ في كل من الأشكال التالية، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ا ب جـ.

أ



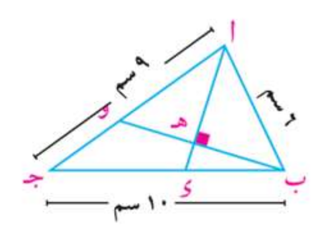
ب



٨ في الشكل المقابل: $\overline{\text{هـ ى}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$،
ا ى × ب س = ا جـ × هـ س.
أثبت أن $\overrightarrow{\text{ا ص}}$ ينصف ∠جـ ا ى.

٩ ا ب جـ مثلث ى ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، ى ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث جـ ى = ا ب. رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ى ا}}$ ويقطع $\overline{\text{ا ب}}$ في هـ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ في و أثبت أن $\overrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ا ب جـ

١٠ في الشكل المقابل: ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٦سم، ا جـ = ٩سم، ب جـ = ١٠سم. ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ى = ٤سم .
رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ى}}$ ويقطع $\overline{\text{ا ى}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ في هـ، و على الترتيب.



أ أثبت أن $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ا.
ب أوجد م (△ا ب و) : م (△جـ ب و)

تطبيقات التناسب فى الدائرة

٣ - ٣

Applications of Proportionality in the Circle

سوف تتعلم

- إيجاد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- تحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- إيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.
- نمذجة وحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى لزاوية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قوة نقطة Power of a point
- دائرة Circle
- وتر Chord
- مماس Tangent
- قاطع Secant
- قطر Diameter
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent

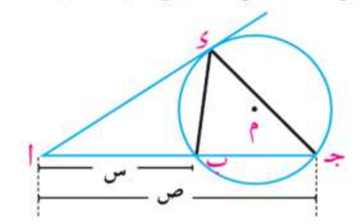
الأدوات والوسائل

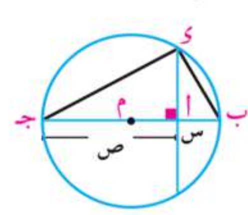
- أدوات هندسية للرسم والقياس



كيف يمكن إنشاء قطعة مستقيمة يكون طولها ل وسطًا متناسبًا بين طولين س، ص لقطعتين معلومتين؟

فى كل من الشكلين التاليين أ ب = س ، أ جـ = ص ، أ ى = ل





∵ △ أ ى ب ~ △ أ جـ ى (لماذا؟) $\therefore \frac{أ ب}{أ ى} = \frac{أ ى}{أ جـ}$

ويكون $\frac{س}{ل} = \frac{ل}{ص}$ ، $ل^2 = س \times ص$ أى أن ل وسط متناسب بين س، ص

عمل تعاونى

أنشئ قطعًا مستقيمة أطوالها $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٢٤}$

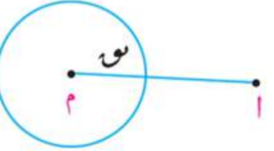
قارن رسمك مع زملائك وتحقق من صحة إجابتك مستخدمًا الآلة الحاسبة والقياس.

أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

تعريف قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى $ق_م(أ)$ حيث: $ق_م(أ) = (أ م)^2 - نق^2$

ملاحظات هامّة

ملاحظة ١



يمكن التنبؤ بموقع نقطة أ بالنسبة للدائرة م

فإذا كان: $ق_م(أ) > ٠$ فإن أ تقع خارج الدائرة.

$ق_م(أ) = ٠$ فإن أ تقع على الدائرة.

$ق_م(أ) < ٠$ فإن أ تقع داخل الدائرة.

مثال

(١) حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥سم إذا كان:

ق‌م (أ) = ١١ ، ق‌م (ب) = صفر ، ق‌م (جـ) = −١٦، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

الحل

∵ ق‌م (أ) = ١١ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة

∵ ق‌م (أ) = (أ م)^2 − نق^2 ∴ ١١ = (أ م)^2 − ٢٥ ∴ أ م = ٦سم

∵ ق‌م (ب) = صفر ∴ ب تقع على الدائرة ∴ ب م = ٥سم

∵ ق‌م (جـ) = −١٦ ∴ جـ تقع داخل الدائرة

∵ ق‌م (جـ) = (جـ م)^2 − نق^2 ∴ −١٦ = (جـ م)^2 − ٢٥ ∴ جـ م = ٣سم

حاول أن تحل

(١) حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة ن التى طول نصف قطرها ٣سم، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة فى كل من الحالات الآتية:

أ ق‌ن (أ) = ١٥ ب ق‌ن (ب) = صفر ج ق‌ن (جـ) = −٤

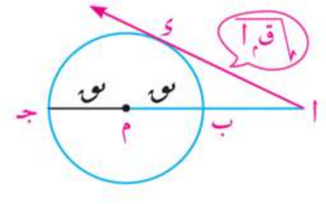
ملاحظة ٢

إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م فإن: ق‌م (أ) = (أ م)^2 − نق^2

= (أ م − نق) (أ م + نق)

= أ ب × أ جـ = (أ ى)^2

∴ طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{\text{ق‌م (أ)}}$



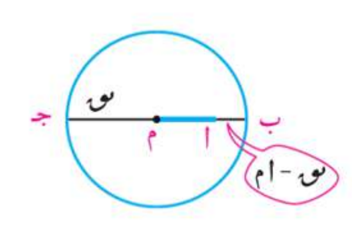
ملاحظة ٣

إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن: ق‌م (أ) = (أ م)^2 − نق^2

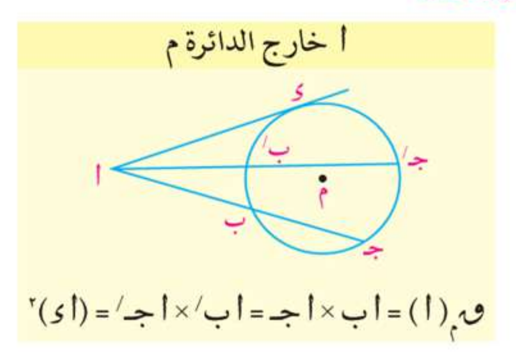
= (أ م − نق)(أ م + نق)

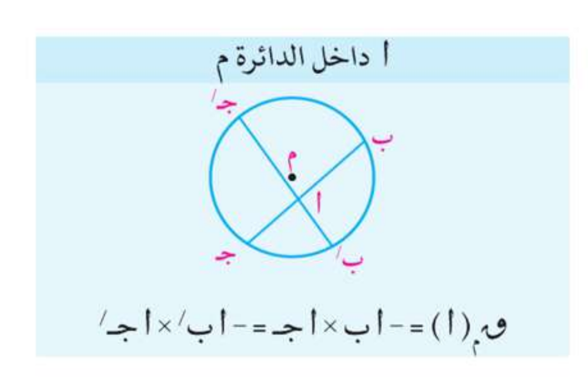
= − (نق − أ م)(أ م + نق)

= − أ ب × أ جـ



وبصفة عامة





مثال

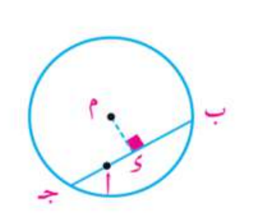
(٢) الدائرة م طول نصف قطرها ٣١سم. النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣سم، رسم الوتر $\overline{ب جـ}$ حيث أ ∈ $\overline{ب جـ}$، أ ب = ٣ أ جـ احسب:

(أ) طول الوتر $\overline{ب جـ}$ (ب) بعد الوتر $\overline{ب جـ}$ عن مركز الدائرة.



الحل

فى الدائرة م:



(أ) ∵ نق = ٣١سم، أ م = ٢٣سم، أ ∈ $\overline{ب جـ}$ ∴ أ تقع داخل الدائرة ويكون

ق$_{م}$(أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} = − أ ب × أ جـ

(٢٣)^{٢} − (٣١)^{٢} = −٣ أ جـ × أ جـ ∴ أ جـ = ١٢سم

∴ طول الوتر $\overline{ب جـ}$ = ٤ أ جـ = ١٢ × ٤ = ٤٨سم

(ب) بفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م ى حيث $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ ى منتصف $\overline{ب جـ}$ ويكون ب ى = ٢٤سم

∴ (م ى)^{٢} = (٣١)^{٢} − (٢٤)^{٢} = ٣٨٥ ∴ م ى = $\sqrt{٣٨٥}$ ≃ ١٩,٦سم

حاول أن تحل

(٢) الدائرة ن طول نصف قطرها ٨سم. النقطة ب تبعد ١٢سم عن مركز الدائرة، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة فى نقطتين جـ، ى، حيث جـ ب = جـ ى، احسب طول الوتر $\overline{جـ ى}$ وبعده عن النقطة ن.

مثال

(٣) دائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب. جـ ∈ $\overleftrightarrow{ب أ}$، جـ ∉ $\overline{ب أ}$، رسم $\overleftrightarrow{جـ ى}$ فقطع الدائرة م فى ى، هـ حيث جـ ى = ٩سم، ى هـ = ٧سم، ورسم $\overrightarrow{جـ و}$ يمس الدائرة ن عند و.

(أ) أثبت أن ق$_{م}$(جـ) = ق$_{ن}$(جـ). (ب) إذا كان أ ب = ١٠سم. أوجد طول كل من $\overline{أ جـ}$، $\overline{جـ و}$.

الحل

(أ) ∵ جـ تقع خارج الدائرة م، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ قاطعان للدائرة م.

∴ ق$_{م}$(جـ) = جـ ى × جـ هـ = جـ أ × جـ ب (١)

∵ جـ تقع خارج الدائرة ن، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ قاطع، $\overline{جـ و}$ مماس لها.

∴ ق$_{ن}$(جـ) = جـ أ × جـ ب = (جـ و)^{٢} (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق$_{م}$(جـ) = ق$_{ن}$(جـ) = ٩ × ١٦ = ١٤٤

(ب) ∵ أ ب = ١٠سم ∴ ق$_{ن}$(جـ) = جـ أ (جـ أ + ١٠) = (جـ و)^{٢} = ١٤٤

∵ (جـ أ)^{٢} + ١٠ جـ أ = ١٤٤ ∴ جـ أ = ٨سم

∵ (جـ و)^{٢} = ١٤٤ ∴ جـ و = ١٢سم

ملاحظة هامّة

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين.

فإذا كان وم (أ) = ون (أ) **فإن** أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م، ن.

فى المثال السابق لاحظ أن: وم(جـ) = ون(جـ) ، وم (أ) = ون (أ) = صفرًا ، وم (ب) = ون(ب) = صفرًا

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

حاول أن تحل

(٣) الدائرتان م، ن متماستان من الخارج فى أ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م، ن، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يقطع الدائرة م فى جـ، ء، $\overleftrightarrow{ب هـ}$ يقطع الدائرة ن فى هـ، و على الترتيب.

أ) **أثبت أن:** $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن

ب) إذا كان وم (ب) = ٣٦ ، ب جـ = ٤سم ، هـ و = ٩سم. **أوجد طول** كل من $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{ب هـ}$.

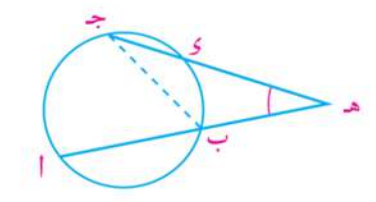
ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزوايا

سبق ودرست:

١- إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.

فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = {هـ}

فإن: ق (∠ أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ء ب}$)]



٢- إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

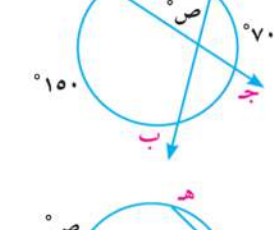
فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = {هـ}

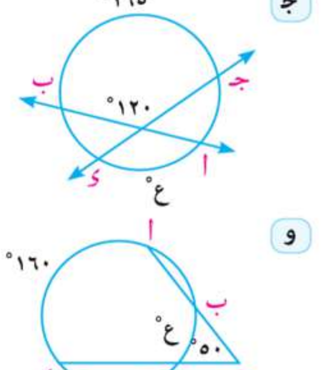
فإن: ق (∠ أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) - ق ($\overset{\frown}{ء ب}$)]

حاول أن تحل

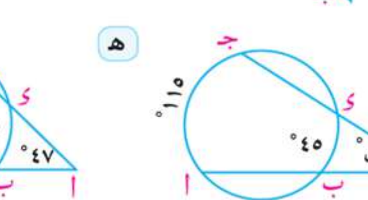
(٤) فى كل من الأشكال الآتية: أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

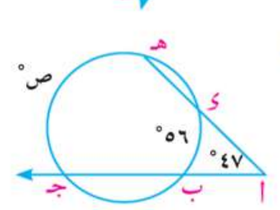
أ ب جـ





د هـ و





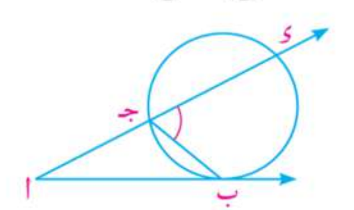
استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس (أو مماسين) لدائرة.

تمرين مشهور

القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

البرهان

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة.



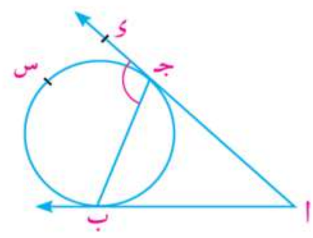
∵ ∠ ى جـ ب خارجة عن △أ ب جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب جـ ى) − ق(∠جـ ب أ)

= ½ ق(ب ى⌒) − ½ ق(ب جـ⌒)

= ½ [ق(ب ى⌒) − ق(ب جـ⌒)]

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة.



∵ ∠ ى جـ ب خارجة عن △أ ب جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب جـ ى) − ق(∠جـ ب أ)

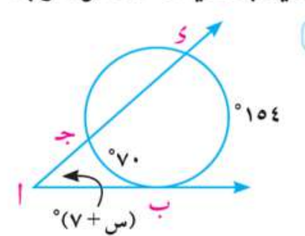
= ½ ق(ب س جـ⌒) − ½ ق(ب جـ⌒)

= ½ [ق(ب س جـ⌒) − ق(ب جـ⌒)]

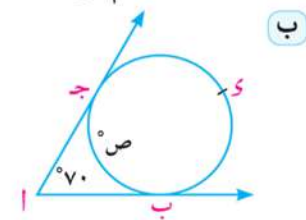
حاول أن تحل

(٥) مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

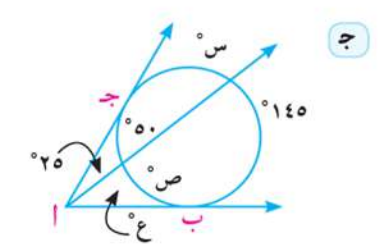
(أ)



(ب)



(جـ)



مثال

(٤) الربط بالأقمار الصناعية: يدور قمر صناعى فى مدار، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°. فأوجد:

(أ) قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.

(ب) طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

الحل

نمذجة المشكلة: باعتبار الدائرة م هى دائرة خط الاستواء يكون ق(⌒ب جـ) = ٥٤°، وطول ⌒ب جـ = ٦٠١١ كم.

أ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒ب ى جـ) = ٣٦٠° - ٥٤° = ٣٠٦°

ويكون ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒ب ى جـ) - ق(⌒ب جـ)]

= $\frac{1}{2}$ (٣٠٦° - ٥٤°) = ١٢٦°

ب فى الدائرة يتناسب طول القوس مع قياسه

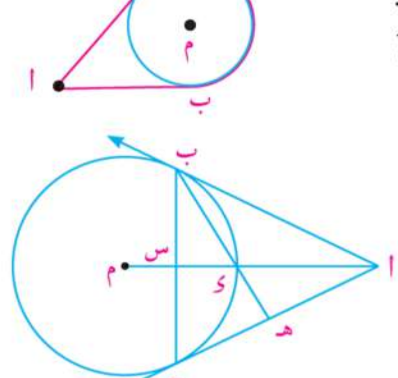
$\frac{٦٠١١}{٢ \times \pi \times نق} = \frac{٥٤°}{٣٦٠°}$ ∴ نق = ٦٣٧٧,٨٧ كم

∴ طول نصف قطر الأرض عند خط الاستواء ≃ ٦٣٧٨ كم.

تذكر

$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط دائرته}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$

حاول أن تحل



٦ تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ. فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠°. فأوجد طول ⌒ب جـ الأكبر، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩سم.

٧ **فى الشكل المقابل:** دائرة م طول نصف قطرها ٩سم، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب، جـ. $\overline{أم}$ يقطع الدائرة فى ى، $\overline{ب جـ}$ في س رسم $\overleftrightarrow{ب ى}$ فقطع $\overline{أ جـ}$ فى هـ. إذا كان ق(∠أ) = ١٤٤ أوجد:

أ طول $\overline{أب}$

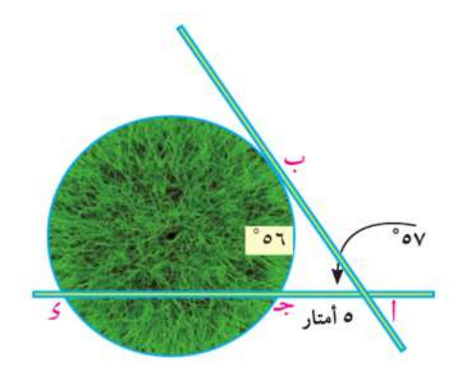
ب طول $\overline{أس}$.

تحقق من فهمك

حل مشكلات: يبين **الشكل المقابل** مخططًا لحديقة على شكل دائرة. أنشئ ممرين للمشاة أحدهما خارج الحديقة يمسها فى النقطة ب والآخر يقطع الحديقة فى نقطتى جـ، ى ويتقاطع الممران عند أ.

إذا كان ق(∠أ) = ١٠٠، أ جـ = ٥ أمتار.

أوجد طول كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ى}$ ، ثم أوجد ق(⌒ب ى).



تمارين ٣ - ٣

① حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتى طول نصف قطرها ١٠سم، ثم احسب بُعدَ كل نقطة عن مركز الدائرة.

أ $ق_م$(أ) = - ٣٦   ب $ق_م$(ب) = ٩٦   جـ $ق_م$(جـ) = صفر

② أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتى طول نصف قطرها نق:

أ النقطة أ حيث أ م = ١٢سم ، نق = ٩ سم

ب النقطة ب حيث ب م = ٨ سم، نق = ١٥ سم

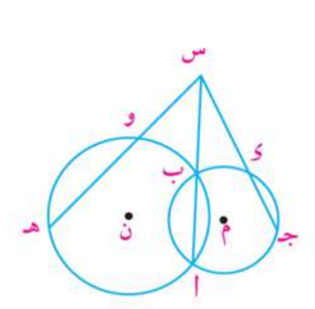
جـ النقطة جـ حيث جـ م = ٧ سم، نق = ٧ سم

د النقطة ى حيث ى م = $\sqrt{١٧}$ سم، نق = ٤ سم

③ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوى ٤٠٠. أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

④ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦سم، رسم الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث أ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ٢ أ جـ. إحسب طول الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

⑤ فى الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان فى أ، ب



حيث $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ = {س}، س ى = ٢ ى جـ ، هـ و = ١٠سم، $ق_ن$(س) = ١٤٤.

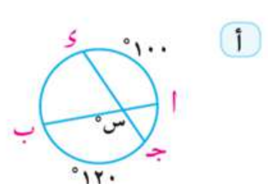
أ أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

ب أوجد طول كل من $\overline{\text{س جـ}}$، $\overline{\text{س و}}$

جـ أثبت أن الشكل جـ ى و هـ رباعى دائرى.

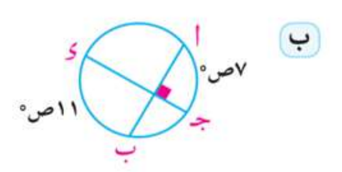
٦ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

أ



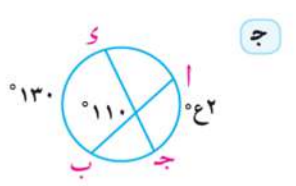
....

ب



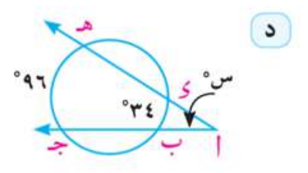
....

جـ



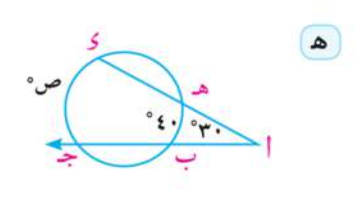
....

د



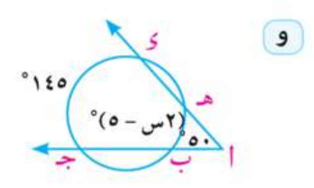
....

هـ



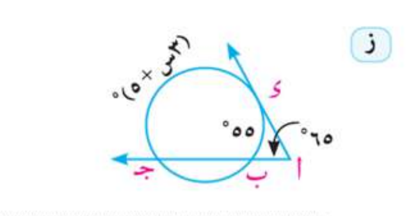
....

و



....

ز

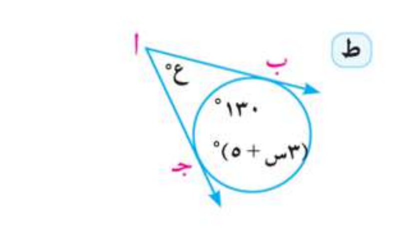


....

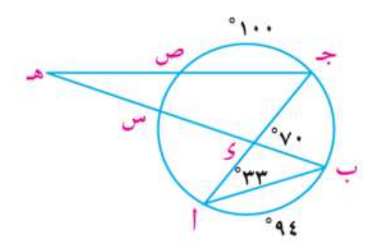
ح

....

ط



....

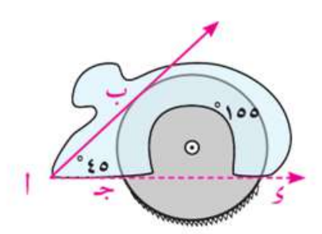


٧ **فى الشكل المقابل:** ق(∠ ب أ جـ) = ٣٣°، ق(∠ ب ى جـ) = ٧٠°، ق(⌒أ ب) = ٩٤°، ق(⌒جـ ص) = ١٠٠° أوجد قياس كل من:

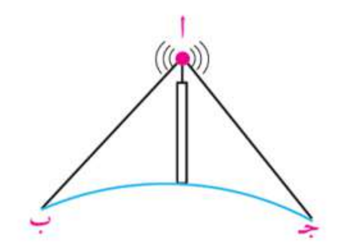
أ ⌒س ص

ب ⌒أ س

جـ ∠ ب هـ جـ



٨ **الربط مع الصناعة:** منشار دائرى لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان ق(∠ ب أ ى) = ٤٥°، ق(⌒ب ى) = ١٥٥° أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.



٩ **اتصالات:** تتبع الإشارات التى تصدر عن برج الاتصالات فى مسارها شعاعًا، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماسًا لسطح الأرض، كما فى الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، ق(∠ جـ أ ب) = ٨٠°

معلومات إثرائية

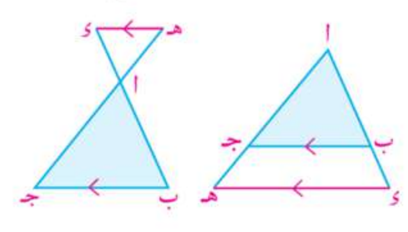
قم بزيارة المواقع الآتية:






ملخص الوحدة

نظرية ١: إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث و يقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع متناسبة.



نتيجة: إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى ء، هـ على الترتيب (كما فى الشكل)

فإن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{هـ جـ}}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$

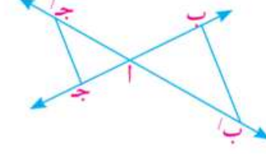
$\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}}$

عكس نظرية ١: إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.

نظرية تاليس العامة Talis Theorem: إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



حالات خاصة



١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ وكان: $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ جـ}'}$، فإن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}'}{\text{أ جـ}'}$

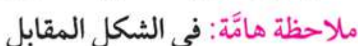
وبالعكس: إذا كان: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}'}{\text{أ جـ}'}$ فإن: $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ جـ}'}$

٢- إذا كان $ل_١ \parallel ل_٢ \parallel ل_٣ \parallel ل_٤$،

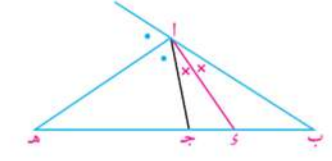
وقطعها المستقيمان م، م/ وكان: أ ب = ب جـ = جـ ء

فإن: أ/ ب/ = ب/ جـ/ = جـ/ ء/

نظرية ٣ منصف زاوية مثلث Triangle- Angle - Bisector: إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين



ملاحظة هامَّة: فى الشكل المقابل



١- $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل فى ء ومن الخارج فى هـ بنسبة واحدة

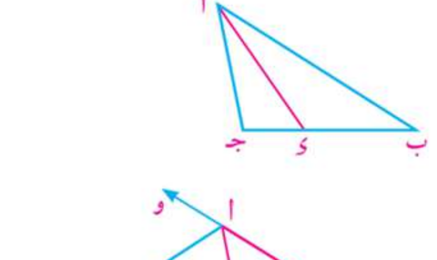
فيكون $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

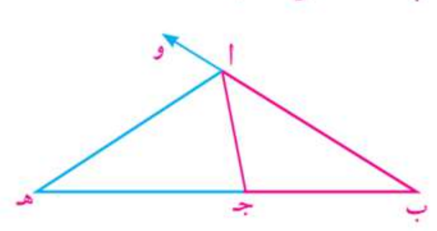
٢- المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية فى مثلث متعامدان؛ أى أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$

٣- إذا كان أ ب > أ جـ، قطع منصف ∠أ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء، حيث ب ء > ء جـ ،أما منصف الزاوية الخارجة عند أ فيقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ، حيث ب هـ > هـ جـ.

٤- $\text{أ ء} = \sqrt{\text{ب أ} \times \text{أ جـ} - \text{ب ء} \times \text{ء جـ}}$

٥- $\text{أ هـ} = \sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{ب أ} \times \text{أ جـ}}$





حالات خاصة عكس نظرية (٣)

١- فى △ ا ب جـ:

إذا كان ى ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث $\frac{ب ى}{ى جـ} = \frac{ب ا}{ا جـ}$

فإن: $\overleftrightarrow{ا ى}$ ينصف ∠ب ا جـ

وإذا كان هـ ∈ $\overleftrightarrow{ب جـ}$، هـ ∉ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{ب ا}{ا جـ}$

فإن: $\overleftrightarrow{ا هـ}$ ينصف ∠ا الخارجة عن المثلث ا ب جـ

٢ - حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

أولًا: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

قوة النقطة ا بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى ق$_م$(ا) حيث:

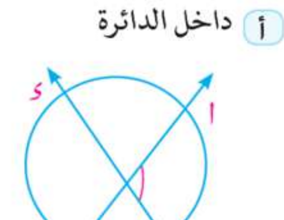
ق$_م$(ا) = (ا م)^2 − نق^2

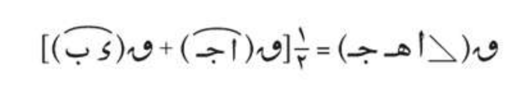
فإذا كان ق$_م$ (ا) > ٠	فإن ا تقع خارج الدائرة م
ق$_م$ (ا) = ٠	ا تقع على الدائرة م
ق$_م$ (ا) < ٠	ا تقع داخل الدائرة م

ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزاوية.

١- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين داخل دائرة:

(أ) داخل الدائرة

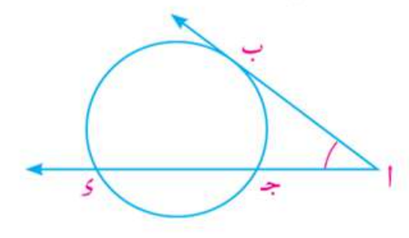


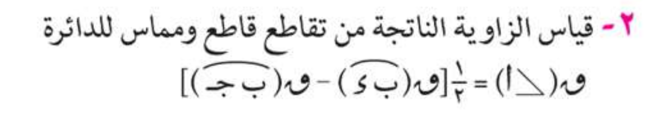


ق(∠ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$[ق($\overparen{ا جـ}$) + ق($\overparen{ى ب}$)]

(ب) خارج الدائرة:

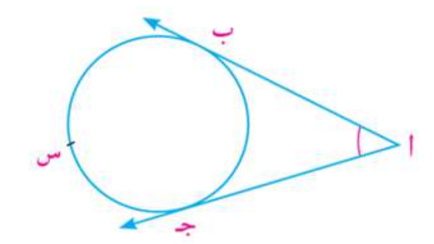
ق(∠ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$[ق($\overparen{ا جـ}$) − ق($\overparen{ب ى}$)]





٢- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس للدائرة

ق(∠ا) = $\frac{1}{2}$[ق($\overparen{ب ى}$) − ق($\overparen{ب جـ}$)]



٣- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين لدائرة.

ق(∠ا) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overparen{ب س جـ}$) − ق($\overparen{ب جـ}$)]



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى).
- يتعرف القياس الدائرى للزوايا المركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى القياس الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية .
- يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة.
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة ($١٨٠° \pm \theta$)، ($٣٦٠° \pm \theta$)، ($٩٠° \pm \theta$)، ($٢٧٠° \pm \theta$).
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:
  - جا أس = جتا ب س
  - ظا أس = ظتا ب س
  - قا أس = قتا ب س
- يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم النسب المثلثية لها.
- يتعرف التمثيل البيانى لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتى تمثلها دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

المصطلحات الأساسية

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية موجهة Directed Angle
- زاوية نصف قطرية (راديان) Radian
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive Measure
- قياس سالب Negative Measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrant Angle
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent
- دالة دائرية Circular Function
- الزاويا المنتسبة Related Angles



دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): الزاوية الموجهة.

الدرس (٤ – ٢): القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.

الدرس (٤ – ٣): الدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٤): الزاويا المنتسبة.

الدرس (٤ – ٥): التمثيل البيانى للدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسم بيانى.

نبذه تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التى اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده فى الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

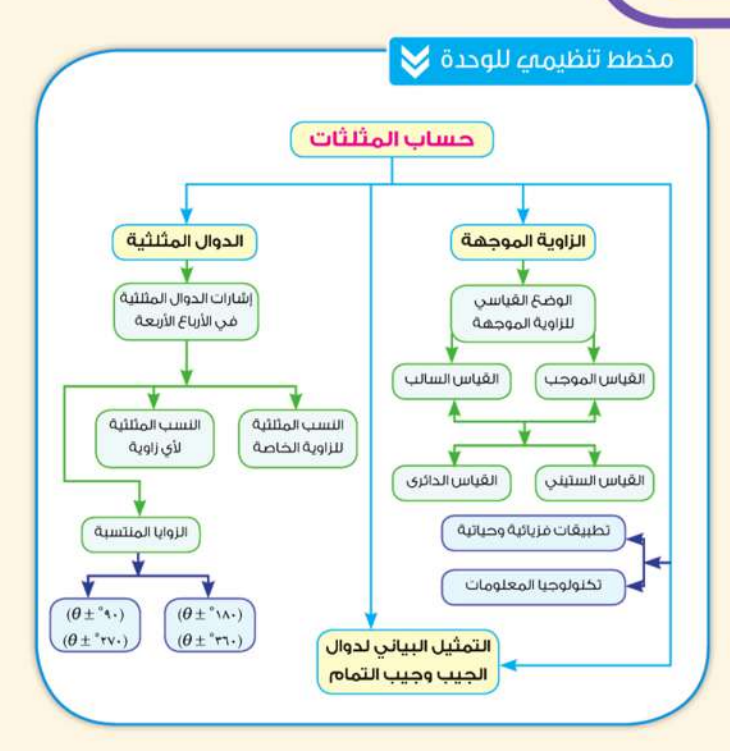
ويعد الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى (٩٤٠ – ٩٩٨م) فى القرن العاشر الميلادى، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكروى (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير.

حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم فى دفع عجلة التقدم والازدهار.

مخطط تنظيمي للوحدة



٤ - ١

الزاوية الموجهة

Directed Angle

سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثي المتعامد .
- مفهوم الزوايا المتكافئة.

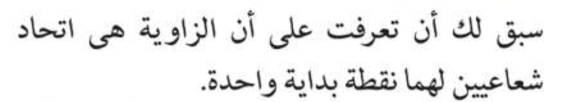
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قياس ستينى Degree Measure
- زاوية موجهة Directed angle
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive measure
- قياس سالب Negative measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrantal Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.





سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هى اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.

في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «**رأس الزاوية**».

والشعاعان $\overrightarrow{بأ}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ **ضلعا الزاوية**.

أى أن: $\overrightarrow{بأ} \cup \overrightarrow{بجـ} = (\angle أ ب جـ)$

وتكتب كذلك $أ\hat{ب}جـ$.

القياس الستينى للزاوية Degree Measure System

علمت أن القياس الستينى يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول. وبالتالى فإن:

١- الزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (١′)

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (١″)

أى أن: ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″



الزاوية الموجهة Directed Angle

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$) حيث العنصر الأول $\overrightarrow{وأ}$ هو الضلع الابتدائى للزاوية، العنصر الثانى $\overrightarrow{وب}$ هو الضلع النهائى للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).

شكل (١)

أما إذا كان الضلع الابتدائى $\overrightarrow{وب}$، الضلع النهائى $\overrightarrow{وأ}$ فتكتب عندئذ ($\overrightarrow{وب}$، $\overrightarrow{وأ}$) كما فى شكل (٢).



شكل (٢)



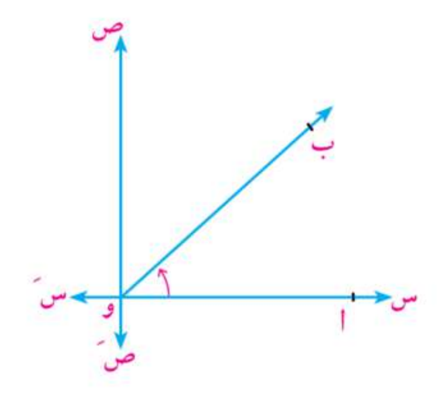
الزاوية الموجهة هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

تفكير ناقد:

- هل (وأ ، وب) = (وب ، وأ)؟ فسِّر إجابتك.

الوضع القياسى للزاوية الموجهة Standard position of the directed angle

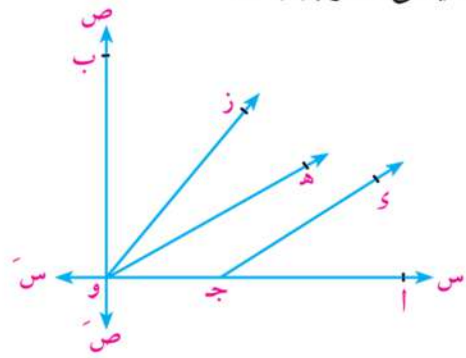
تكون الزاوية فى وضع قياسى إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحورالسينات.



هل ∠أ و ب الموجهة فى الوضع القياسى؟ فسِّر إجابتك.

تعبير شفهى

أيٌّ من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسى؟ فسِّر إجابتك .



أ (جـأ ، جـى) ب (وأ ، وهـ)

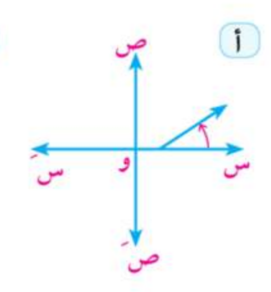
جـ (وهـ ، وأ) د (وأ ، وز)

هـ (وب ، وز) و (وأ ، وب)

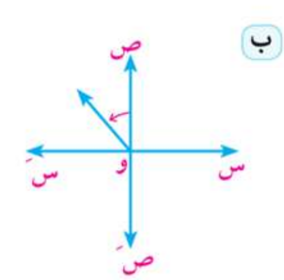
حاول أن تحل

(١) أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى؟ فسِّر إجابتك.

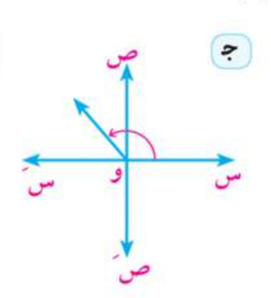
أ



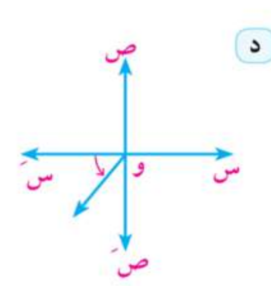
ب



جـ



د

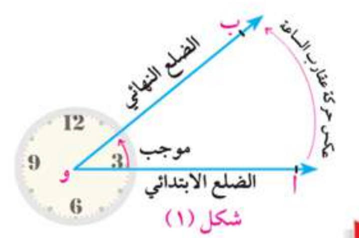


القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

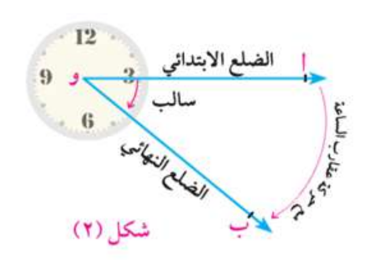
Positive and negative measures of a directed angle

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{\text{و أ}}$ إلى الضلع النهائي $\overrightarrow{\text{و ب}}$ ، فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{\text{و أ}}$ إلى الضلع النهائي $\overrightarrow{\text{و ب}}$، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



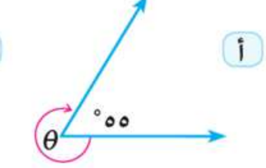
شكل (١)

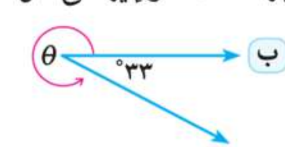


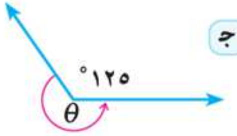
شكل (٢)

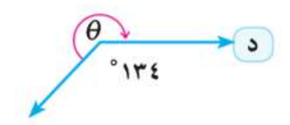
مثال

(١) أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:

أ


ب


جـ


د


الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى °٣٦٠

أ θ = - (°٣٦٠ - °٥٥) = - °٣٠٥

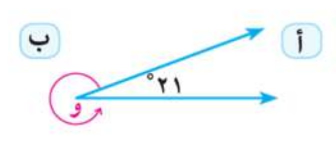
ب θ = °٣٦٠ - °٣٣ = °٣٢٧

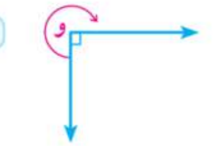
جـ θ = °٣٦٠ - °١٢٥ = °٢٣٥

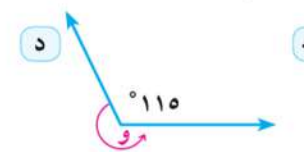
د θ = - (°٣٦٠ - °١٣٤) = - °٢٢٦

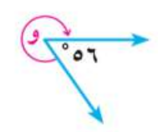
حاول أن تحل

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:

أ


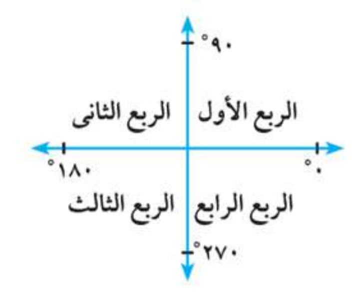
ب


جـ


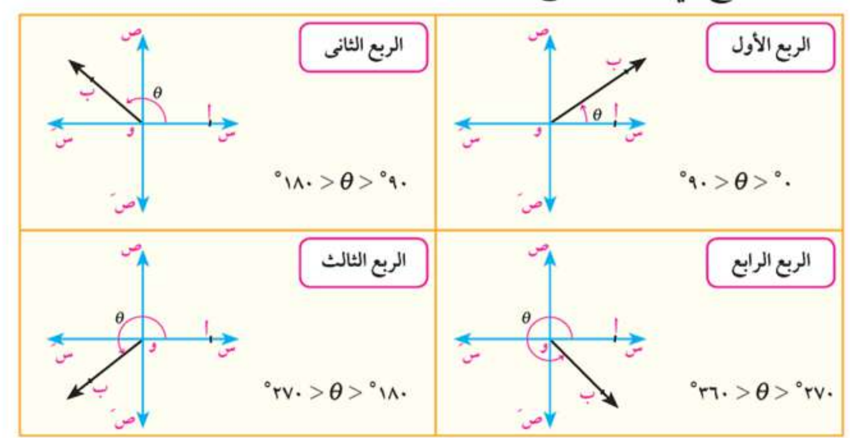
د


موقع الزاوية فى المستوى الإحداثى المتعامد: Angle's position in the orthogonal coordinate plane

- يقسم المستوى الإحداثى المتعامد إلى أربعة أرباع كما فى الشكل المقابل.



- إذا كانت ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي و ب يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



- إذا وقع الضلع النهائي و ب على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة **بالزاوية الربعية** (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التي قياساتها ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° هي زوايا ربعية.

مثال

(٢) عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

أ ٤٨° ب ٢١٧° ج ١٣٥° د ٢٩٥° هـ ٢٧٠°

الحل

أ ٠° < ٤٨° < ٩٠° فهي تقع في الربع الأول.

ب ١٨٠° < ٢١٧° < ٢٧٠° فهي تقع في الربع الثالث.

ج ٩٠° < ١٣٥° < ١٨٠° فهي تقع في الربع الثاني.

د ٢٧٠° < ٢٩٥° < ٣٦٠° فهي تقع في الربع الرابع.

هـ ٢٧٠° زاوية ربعية.

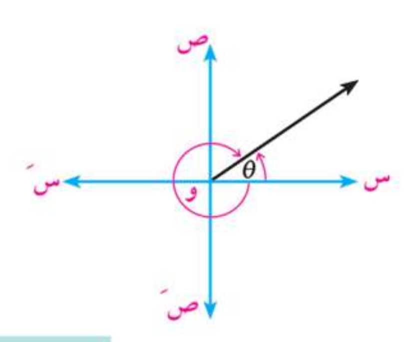
حاول أن تحل

(٣) عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

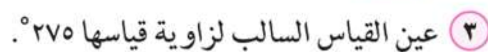
أ ٨٨° ب ١٥٢° ج ١٨٠° د ٣٠٠° هـ ١٩٦°

ملاحظة:

- إذا كان (θ°) هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها يساوي (θ° − ٣٦٠°)
- وإذا كان (−θ°) هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها يساوي (−θ° + ٣٦٠°)



مثال



٣ عين القياس السالب لزاوية قياسها ٢٧٥°.

الحل

القياس السالب للزاوية (٢٧٥°) = ٢٧٥° − ٣٦٠° = −٨٥°

التحقيق: |٢٧٥°| + |−٨٥°| = ٢٧٥° + ٨٥° = ٣٦٠°

> **أضف إلى معلوماتك**
> مجموع القيمة المطلقة لكل من القياسين الموجب والسالب للزاوية الموجهة يساوى ٣٦٠°

حاول أن تحل

٤ عين القياس السالب للزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٣٢° ب ٢٧٠° ج ٢١٠° د ٣١٥°

مثال

٤ عين القياس الموجب للزاوية −٢٣٥°

الحل

القياس الموجب للزاوية (− ٢٣٥°) = ٣٦٠° − ٢٣٥° = ١٢٥°

التحقيق: |−٢٣٥°| + |١٢٥°| = ٢٣٥° + ١٢٥° = ٣٦٠°

حاول أن تحل

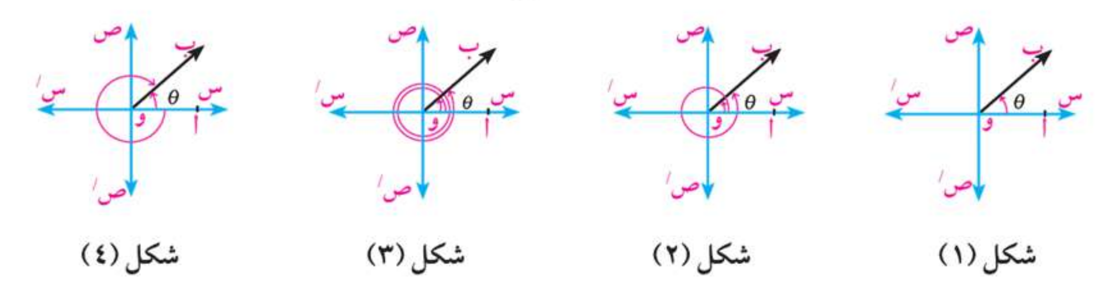
٥ عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ −٥٢° ب −١٢٦° ج −٩٠° د −٣٢٠°

٦ **الربط بالألعاب الرياضية:** يدور أحد لاعبى القرص بزاوية قياسها ١٥٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسى.

الزوايا المتكافئة Equivalent angles

تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة (θ) فى الوضع القياسى لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

فى الأشكال (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$.

شكل (١): الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى.

شكل (٢): الزاويتان θ ، θ + ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان θ ، θ + ٢ × ٣٦٠° متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان θ ، −(٣٦٠° − θ) = θ − ٣٦٠° متكافئتان

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى فإن جميع الزوايا التى قياساتها:

$\theta \pm$ ١ × ٣٦٠° أو $\theta \pm$ ٢ × ٣٦٠° أو $\theta \pm$ ٣ × ٣٦٠° أو..... أو θ + ن × ٣٦٠° حيث ن ∋ ص

يكون لها نفس الضلع النهائى، وتسمى **زوايا متكافئة**.

مثال

٥ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ ١٢٠° ب - ٢٣٠°

الحل

أ زاوية بقياس موجب: ١٢٠° + ٣٦٠° = ٤٨٠° (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: ١٢٠° - ٣٦٠° = -٢٤٠° (بطرح ٣٦٠°)

ب زاوية بقياس موجب: -٢٣٠° + ٣٦٠° = ١٣٠° (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: -٢٣٠° - ٣٦٠° = -٥٩٠° (بطرح ٣٦٠°)

فكر: هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا الآتية:

أ ٤٠° ب ١٥٠° جـ - ١٢٥° د -٢٤٠° هـ -١٨٠°

٨ **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° في الوضع القياسى ما عدا الإجابة:

أ -٢٨٥° ب -٦٤٥° جـ ٢٨٥° د ٤٣٥°

تحقق من فهمك

١ عين الربع الذى تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٥٦° ب ٣٢٥° جـ ٥٧٠° د ١٦٦° هـ ٣٩٠°

٢ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٤٣° ب ٢١٤° جـ ١٢٥° د ٩٠° هـ ٣١٢°

٣ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ -٥٦° ب -٢١٥° جـ ٤٩٥° د ٩٣٠° هـ -٤٥٠°

تمـــاريـن ٤ – ١

١ أكمل:

أ تكون الزاوية الموجهة فى وضع قياسى إذا كان ....

ب يقال للزاوية الموجهة فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان ....

جـ تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية .... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية ....

د إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات تسمى ....

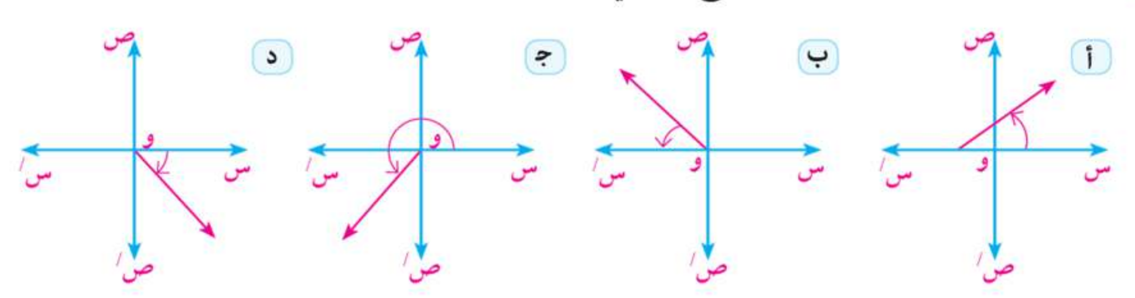
هـ إذا كان θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى، ن ∈ ص فإن (θ + ن × ٣٦٠°) تسمى بالزوايا ....

و أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها ٥٣٠° هو ....

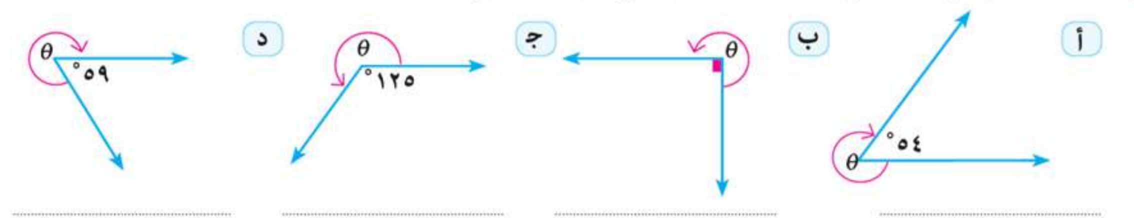
ز الزاوية التى قياسها ٩٣٠° تقع فى الربع ....

ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها –٦٩٠° هو ....

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية فى الوضع القياسي



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال التالية:



....

٤ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٢٤° ب ٢١٥° جـ –٤٠° د –٢٢٠° هـ ٦٤٠°

....

٥ ضع كلًّا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى، موضحًا ذلك بالرسم:

أ ٣٢° ب ١٤٠° جـ -٨٠° د -١١٠° هـ -٣١٥°

٦ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:

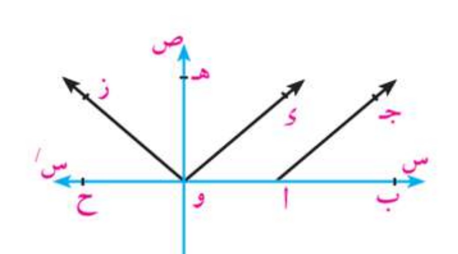
أ ٨٣° ب ١٣٦° جـ ٩٠°

د ٢٦٤° هـ ٩٦٤° و ١٠٧٠°

٧ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ -١٨٣° ب -٢١٧° جـ -٣١٥° د -٥٧٠°

٨ فى الشكل المقابل: أيًا من الأزواج المرتبة الآتية تعبر عن زاوية موجهة فى وضعها القياسى؟ لماذا؟



أ (وأ ، وى) ب (وز ، وجـ)

جـ (أب ، أجـ) د (وهـ ، وى)

هـ (وى ، وز) و (وب ، وز)

٩ يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى

١٠ اكتشف الخطأ: اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائى للزاوية (-١٣٥°)

إجابة كريم

أصغر زاوية بقياس موجب = -١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°

أصغر زاوية بقياس سالب = -١٣٥° - ١٨٠° = -٣١٥°

إجابة زياد

أصغر زاوية بقياس موجب = -١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°

أصغر زاوية بقياس سالب = -١٣٥° - ٣٦٠° = -٤٩٥°

أى الإجابتين صحيح ؟ فسر إجابتك.

٤ - ٢

القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

Degree Measure and Radian Measure of an Angle

سوف تتعلم

- مفهوم القياس الدائرى للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائرى.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.



- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle



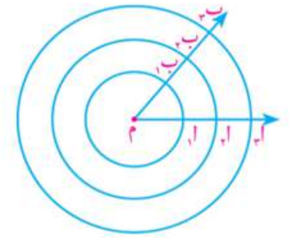
- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن علمت أن القياس الستينى ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = ٦٠ دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية.
هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

القياس الدائرى Radian Measure

عمل تعاونى



١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما فى الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوى مقدارًا ثابتًا.

أى أن: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{ا_1ب_1}}{م\,ا_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{ا_2ب_2}}{م\,ا_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{ا_3ب_3}}{م\,ا_3}$ = مقدار ثابت.

وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية.

القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز لها بالرمز ($\theta^{ء}$)

تعريف



إذا كان $\theta^{ء}$ هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها نق تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن: $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ من الزاوية نصف قطرية

من التعريف نستنتج أن: ل = $\theta^{ء}$ × نق ، نق = $\frac{ل}{\theta^{ء}}$

ووحدة قياس الزواية فى القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز (١ᵈ) ويقرأ واحد دائرى (راديان).

تعريف

الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

θ = ١ راديان

تفكير ناقد: هل القياس الدائرى لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسِّر إجابتك.

مثال

(١١) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد لأقرب رقمين عشرين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله يساوى $\frac{٥\pi}{١٢}$

الحل

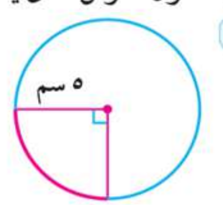
نستخدم صيغة طول القوس: ل = $\theta^{ᵈ}$ × نق

بالتعويض عن نق = ٨ سم ، $\theta^{ᵈ} = \frac{٥\pi}{١٢}$ فيكون: ل = $\frac{٥\pi}{١٢}$ × ٨ ∴ ل ≃ ١٠,٤٧سم

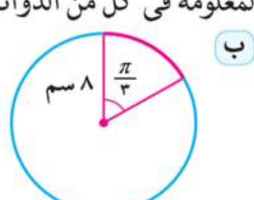
حاول أن تحل

(١) أوجد طول القوس الذى يحصر الزاوية المعلومة فى كل من الدوائر الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة .

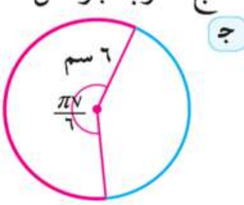
أ



ب



ج



العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية:

Relation between degree measure and radian measure of an angle

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوى قياس قوسها.

أى أن: الزاوية المركزية التى قياسها الستينى ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢ π نق



وفى دائرة الوحدة

فإن: ٢π (راديان) بالتقدير الدائرى يكافئ ٣٦٠° بالتقدير الستينى.

أى أن: π (راديان) يكافئ ١٨٠° ١ᵈ (راديان) = $\frac{١٨٠°}{\pi}$ ≃ ٥٧° ١٧َ ٤٥ً

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائرى $\theta^{ᵈ}$ وقياسها الستينى سْ فإن:

$$\frac{\theta^{ᵈ}}{\pi} = \frac{س°}{١٨٠°}$$

مثال

(١٢) حول ٣٠° إلى قياس دائرى بدلالة π.

الحل

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^ء}{\pi}$$

$$\theta^ء = \frac{٣٠^\circ \times \pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٦}$$

> **أضف إلى معلوماتك**
>
> توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grad) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.
>
> إذا كانت س، θ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة، والراديان، والجراد فإن:
>
> $$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^ء}{\pi} = \frac{ص^ج}{٢٠٠}$$

حاول أن تحل

(٢) الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة أحدها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كتب بالدرجات (داخل الدائرة). اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.

ص، س، و، $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٦}$، π، ٢π، $\frac{٧\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٤}$، $\frac{٤\pi}{٣}$، $\frac{٣\pi}{٢}$

٩٠°، ٦٠°، ٤٥°، ٣٠°، ١٢٠°، ١٣٥°، ١٥٠°، ١٨٠°، ٣٦٠°، ٣٣٠°، ٣١٥°، ٣٠٠°، ٢٧٠°

مثال

(١٣) حول قياس الزاوية ١,٢ء إلى قياس ستينى.

الحل

$$س^\circ = \frac{١,٢ \times ١٨٠^\circ}{\pi}$$

$$س^\circ = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢ = ١٨ \; ٤٥ \; ٦٨^\circ$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:

ابدأ 1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = °'''

68° 45" 17.77"

حاول أن تحل

(٣) حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس سيتينى مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

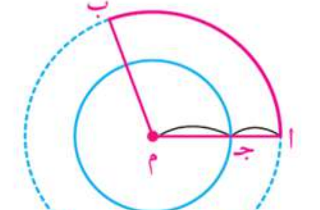
(أ) ٠,٧ء (ب) ١,٦ء (ج) ٢,٠٥ء (د) -١,٠٥ء

مثال

(١٤) الربط بالفضاء: قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر.



الحل



يبين الشكل المقابل المسار الدائرى لحركة القمر:

∵ طول نصف قطر دائرة مسار القمر م أ = م جـ + جـ أ

∴ م أ = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∵ القمر يقطع المسار الدائرى (دورة كاملة) فى ٣ ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية = ٢ π

∴ القمر يقطع قوسًا طوله $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة فى الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية = $\frac{٢\pi}{٣}$

نستخدم صيغة طول القوس: ل = θء × نق

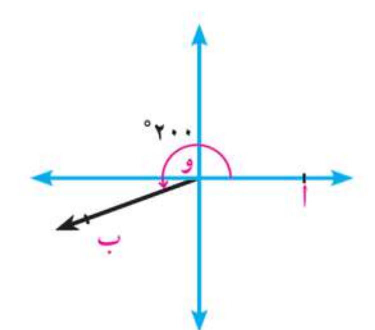
بالتعويض عن نق = ١٠٠٠٠ كم، θء = $\frac{٢\pi}{٣}$: ل = $\frac{٢\pi}{٣}$ × ١٠٠٠٠

ل ≃ ٢٠٩٤٤ كم



١٥ **ألعاب رياضية:** يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°. ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى.

الحل



ارسم محورين لإنشاء مستوى إحداثى متعامد ومتقاطعين في النقطة و.

بفرض أن اللاعب يدور بزاوية موجهة أ و ب حيث:

∠ (أ و ب) = ($\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$) فيكون ق (∠ أ و ب) = ٢٠٠°.

∵ ١٨٠° < ٢٠٠° < ٢٧٠°

∴ الضلع النهائى للزاوية يقع في الربع الثالث.

٢٠٠° = $\frac{٢٠٠ \times \pi}{١٨٠}$ ≃ ٣,٤٩ء

حاول أن تحل

٤ **الربط بالألعاب الرياضية:** لاعب اسكواش تحرك فى مسار على شكل قوس طول نصف قطر دائرته ١,٤ متر وزاوية دوران اللاعب ٨٠° أوجد لأقرب جزء من عشرة طول هذا القوس.

تحقق من فهمك

١ **الصناعة:** يدور قرص آلة بزاوية قياسها – ٣١٥° ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى.

تمـــاريـن ٤ – ٢

أولًا: اختيار من متعدد:

١) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها:

أ) ١٢٠° ب) ٢٤٠° ج) ٣٠٠° د) ٤٢٠°

٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع فى الربع:

أ) الأول ب) الثانى ج) الثالث د) الرابع

٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع:

أ) الأول ب) الثانى ج) الثالث د) الرابع

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى ١٨٠°(ن – ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية المخمس المنتظم بالقياس الدائرى تساوى:

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{٧\pi}{٢}$ ج) $\frac{٣\pi}{٥}$ د) $\frac{٢\pi}{٣}$

٥) الزاوية التى قياسها $\frac{٧\pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى:

أ) ١٠٥° ب) ٢١٠° ج) ٤٢٠° د) ٨٤٠°

٦) إذا كان القياس الستينى لزاوية هو ٤٨َ ٦٤ْ فإن قياسها الدائرى يساوى:

أ) ٠,١٨ ء ب) ٠,٣٦ ء ج) ٠,١٨ π د) ٠,٣٦ π

٧) طول القوس فى دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٣٠° يساوى:

أ) ٢π سم ب) ٣π سم ج) ٤π سم د) ٥π سم

٨) القوس الذى طوله ٥πسم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:

أ) ٣٠° ب) ٦٠° ج) ٩٠° د) ١٨٠°

٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٤}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى:

أ) $\frac{\pi}{٦}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) أوجد بدلالة π القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٢٢٥° .... ب ٢٤٠° ....

جـ -١٣٥° .... د ٣٠٠° ....

هـ ٣٩٠° .... و ٧٨٠° ....

(١١) أوجد القياس الدائرى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ ٥٦,٦° ب ١٨° ٢٥′ جـ ١٦٠° ٥٠′ ٤٨″

....

(١٢) أوجد القياس الستينى للزوايا التى قياساتها كالآتى، مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ ٠,٤٩ ء ب ٢,٢٧ ء جـ $-٣\frac{١}{٢}$ ء

....

(١٣) إذا كان θ قياس زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق وتحصر قوسًا طوله ل :

أ إذا كان نق = ٢٠ سم، θ = ٧٨° ١٥′ ٢٠″ أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

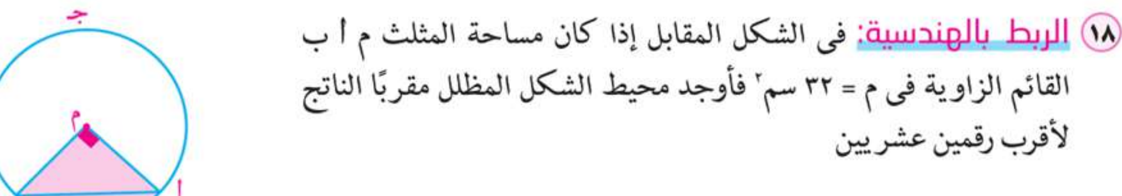
ب إذا كان ل = ٢٧,٣ سم، θ = ٧٨° ٠′ ٢٤″ أوجد نق. (لأقرب جزء من عشرة)

(١٤) زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوسًا طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

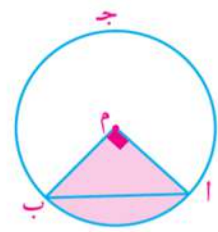
(١٥) أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى للزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٨,٧ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

(١٦) الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة.

(١٧) الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت ∠ أ ب جـ المحيطية التى قياسها ٣٠° أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$



(١٨) الربط بالهندسية: فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم² فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

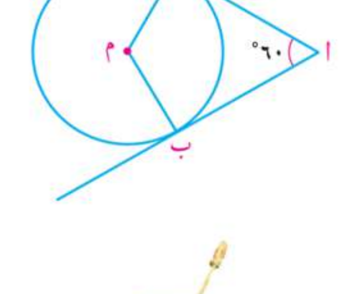


(١٩) **الربط بالهندسة:** $\overline{أب}$ قطر فى دائرة طوله ٢٤ سم ، رسم الوتر $\overline{أجـ}$ بحيث كان ق(∠ب أجـ) = ٥٠°
أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{أجـ}$ مقربًا الناتج لأقرب رقميين عشريين.

(٢٠) **مسافات:** كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

(٢١) **فلك:** قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر فى الساعة.

(٢٢) **الربط بالهندسة:** فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة م، ق (∠ جـ أ ب) = ٦٠°، أ ب = ١٢ سم.
أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{ب جـ}$.

(٢٣) **الربط بالزمن:** تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل ١٥° لكل ساعة.

(أ) أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

(ب) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{٢\pi}{٣}$ راديان؟

(جـ) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

(٢٤) **تفكير ناقد:** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ فى الوضع القياسى لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

٤ - ٣ الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

وفى △أ ب جـ القائم الزاوية في ب نجد:

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

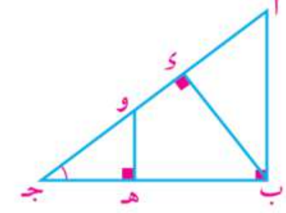
جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

١- في الشكل المقابل عبر عن جا جـ بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تتساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟



لاحظ أن:

المثلثات ب أ جـ ، هـ و جـ ، ء ب جـ متشابهه (لماذا)؟

ومن التشابه يكون: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\text{هـ و}}{\text{و جـ}}$ = $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}}$ = جا جـ لماذا؟

أى أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

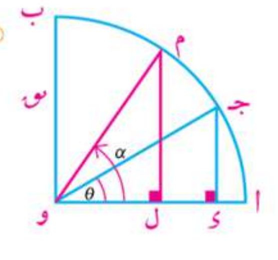
٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها نق سم

حيث: ق (∠ء و جـ) = θ

جا θ = $\frac{\text{جـ ء}}{\text{نق}}$

وعندما يزداد ق (∠ء و جـ) إلى α

فإن جا α = $\frac{\text{م ل}}{\text{نق}}$



أى أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها، وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

دائرة الوحدة
The unit circle

فى أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١، ٠)، ب (−١، ٠)، وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠، ١)، ى (٠، −١).

★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

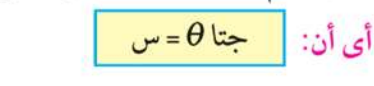
س ∈ [−١، ١] ، ص ∈ [−١، ١].

حيث س^{٢} + ص^{٢} = ١ **نظرية فيثاغورث**

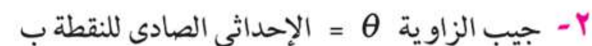
الدوال المثلثية الأساسية للزاوية
The basic trigonometric functions of an angle

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية:

١- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثى السينى للنقطة ب

أى أن: 

جتا θ = س



٢- جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب

أى أن: جا θ = ص

٣- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

أى أن: ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠ ، ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث جتا θ ≠ ٠

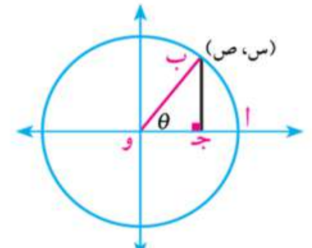
لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ، جا θ)

إذا كانت النقطة جـ$\left(\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥}\right)$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهه قياسها θ مع دائرة الوحدة

فإن: جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

مقلوبات الدوال الأساسية
The reciprocals of the basic trigonmetric functions

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص) وقياسها θ توجد الدوال الآتية:



١- قاطع الزاوية θ: قا θ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث س ≠ ٠

٢- قاطع تمام الزاوية θ: قتا θ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

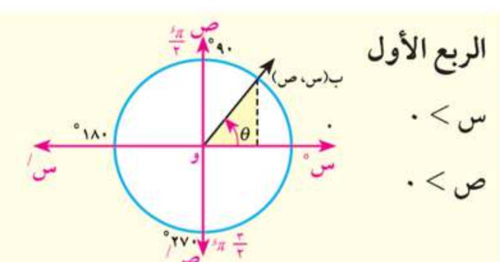
٣- ظل تمام الزاوية θ: ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

إشارات الدوال المثلثية The signs of The Trigonometric Functions

الربع الأول

س > ٠

ص > ٠



الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الأول.
لذلك كل الدوال المثلثية للزاوية التى ضلعها النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ تكون موجبة

الربع الثاني

س < ٠

ص > ٠

الضلع النهائى يقع فى الربع الثانى
لذلك دالة الجيب ومقلوبها تكونان موجبتين وباقى الدوال سالبة.

الربع الثالث

س < ٠

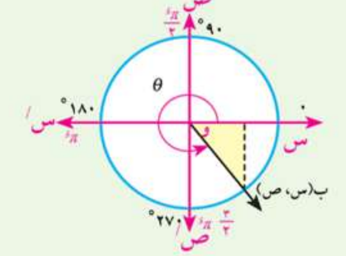
ص < ٠

الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الثالث
لذلك دالة الظل ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

الربع الرابع

س > ٠

ص < ٠



الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الرابع
لذلك دالة جيب التمام ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها فى الجدول الآتى:

الربع الذى يقع فيه الضلع النهائى للزاوية	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[	+	+	+
الثانى	]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[	+	−	−
الثالث	]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[	−	−	+
الرابع	]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[	−	+	−

كل الدوال (+) | جا، قتا (+)

جتا، قا (+) | ظا، ظتا (+)

مثال

① عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جا ١٣٠° ب ظا ٣١٥° ج جتا ٦٥٠° د قا (−٣٠°)

الحل

أ الزاوية التى قياسها ١٣٠° تقع في الربع الثانى ∴ جا ١٣٠° موجبة

ب الزاوية التى قياسها ٣١٥° تقع في الربع الرابع ∴ ظا ٣١٥° سالبة

جـ الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تكافىء زاوية قياسها ٦٥٠° - ٣٦٠° = ٢٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تقع في الربع الرابع ∴ جتا ٦٥٠° موجبة.

د الزاوية التى قياسها (-٣٠°) تكافئ زاوية قياسها - ٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

الزاوية التى قياسها (-٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ قا (-٣٠°) موجبة.

حاول أن تحل

١ عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جتا ٢١٠° ب جا ٧٤٠° جـ ظا - ٣٠٠° د جا ١٢٣٠°

مثال

٢ إذا كانت ∠ أ و ب فى وضعها القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب وقياسها θ.
أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هى:

أ (٠، -١) ب $(\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ص) جـ (-س، س)

حيث س > ٠ ، ص > ٠

الحل

أ جتا θ = ٠ ، جا θ = -١ ، ظا $\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

ب س^٢ + ص^٢ = ١ (دائرة الوحدة) ، بالتعويض عن س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$ + ص^٢ = ١ فيكون ص^٢ = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ ، ص = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ < ٠ (مرفوض)

∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ١

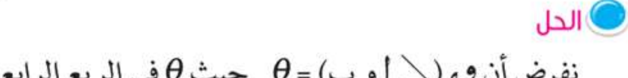
جـ (-س)^٢ + (س)^٢ = ١ ∴ ٢س^٢ = ١ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لأن س > ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ويكون: جتا θ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = -١

٣ إذا كانت ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° وكان جا θ = - $\frac{٥}{١٣}$ أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

الحل



نفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن إحداثيى النقطة ب هما (س، ص)

∵ ص = جا θ = - $\frac{٥}{١٣}$ ، س = جتا θ حيث جتا θ > ٠

∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ جتا$^٢ \theta$ + $(\frac{-٥}{١٣})^٢$ = ١

∴ جتا$^٢ \theta$ = ١ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ جتا$^٢ \theta$ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ أو جتا θ = - $\frac{١٢}{١٣}$

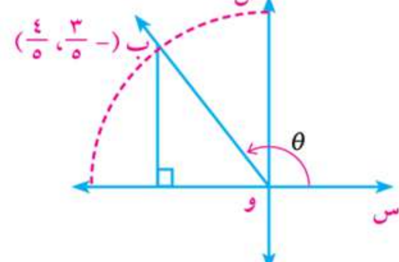
جتا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$ (لماذا)؟ ظا $\theta = -\frac{١٢}{٥}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت ٩٠° $< \theta <$ ١٨٠°، جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ أوجد جتا θ، ظا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسى في دائرة الوحدة.

مثال

(٤) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ و المرسومة فى الوضع القياسى، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $(-\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$. فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية θ.




الحل

جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، جتا $\theta = \frac{-٣}{٥} = -\frac{٣}{٥}$ ، ظا $\theta = \frac{٤}{-٣} = -\frac{٤}{٣}$

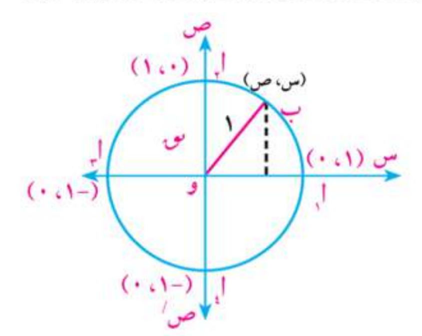
قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$ ، قا $\theta = \frac{٥}{-٣} = -\frac{٥}{٣}$ ، ظتا $\theta = \frac{-٣}{٤} = -\frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى، و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب حيث:

أ ب $(\frac{٥}{١٣}، \frac{١٢}{١٣})$ ب ب $(\frac{٣}{٥}، -\frac{٤}{٥})$ ج ب $(-\frac{١٢}{١٣}، \frac{٥}{١٣})$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة The trigonometric functions of some special angles



في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محورى الإحداثيات في النقاط $أ_١$(١، ٠)، $أ_٢$(٠، ١)، $أ_٣$(-١، ٠)، $أ_٤$(٠، -١).

وكانت θ قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسى، والذى يقطع ضلعها النهائى $\overleftrightarrow{و ب}$ دائرة الوحدة في ب.

أولًا: إذا كانت θ = ٠° أو θ = ٣٦٠° **فإن:** ب(١، ٠)

ويكون: جتا ٠° = جتا ٣٦٠° = ١ ، جا ٠° = جتا ٣٦٠° = صفر،

ظا ٠° = ظا ٣٦٠° = صفر

ثانيًا: إذا كانت θ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ **فإن:** ب(٠، ١)

جتا ٩٠° = صفر ، جا ٩٠° = ١ ، ظا ٩٠° = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

ثالثًا: إذا كانت θ = ١٨٠° = π **فإن:** ب(-١، ٠)

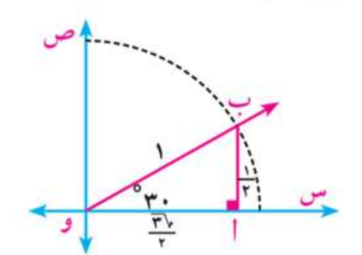
جتا ١٨٠° = -١ ، جا ١٨٠° = صفر ، ظا ١٨٠° = صفر

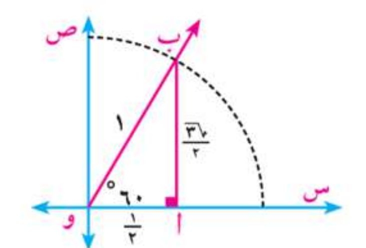
رابعًا: إذا كانت θ = ٢٧٠° = $\frac{3\pi}{2}$ **فإن:** ب(٠، -١)

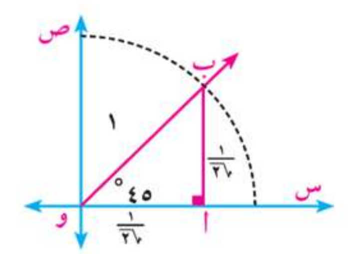
جتا ٢٧٠° = ٠ ، جا ٢٧٠° = -١ ، ظا ٢٧٠° = $\frac{-1}{\text{صفر}}$ (غير معرف)

حاول أن تحل

٤) في الأشكال التالية حدد إحداثيي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°









٥) أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{4}$

الحل

تعلم أن جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (١)

∵ $\frac{\pi}{4}$ = ٤٥° ، جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الطرف الأيسر = جا² $\frac{\pi}{4}$ = جا² ٤٥° = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

٥) أوجد قيمة: ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

٦) تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التى قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا θ = $\frac{-1}{2}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
هل من الممكن أن يكون θ = ٢٤٠°؟ وضح ذلك.

تحقق من فهمك

أثبت صحة كلٍّ من المتساويات التالية:

أ) ١ - ٢جا² ٩٠° = جتا١٨٠° ب) جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا² $\frac{\pi}{4}$ - جا² $\frac{\pi}{4}$

تمـــاريـن ٤ – ٣

أولًا: الاختيار من متعدد:

١) إذا كان θ قياس زاوية فى الوضع القياسى و ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ فإن جا θ تساوى:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

٢) إذا كانت جا $\theta = \frac{١}{٢}$ حيث θ زاوية حادة فإن θ تساوى

أ) $°٣٠$ ب) $°٤٥$ ج) $°٦٠$ د) $°٩٠$

٣) إذا كانت جا $\theta = -١$، جتا $\theta = ٠$ فإن θ تساوى

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) π ج) $\frac{٣\pi}{٢}$ د) ٢π

٤) إذا كانت قتا $\theta = ٢$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوى

أ) $°١٥$ ب) $°٣٠$ ج) $°٤٥$ د) $°٦٠$

٥) إذا كانت جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن θ تساوى

أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ د) $\frac{١١\pi}{٦}$

٦) إذا كانت ظا $\theta = ١$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ تساوى

أ) $°١٠$ ب) $°٣٠$ ج) $°٤٥$ د) $°٦٠$

٧) ظا $°٤٥$ + ظتا $°٤٥$ – قا $°٦٠$ تساوى

أ) صفرًا ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) ١

٨) إذا كانت جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن جا θ تساوى

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة

أ) $(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣})$ ب) $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ج) $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$ د) $(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥})$

١٠ إذا كان θ هو قياس زاويه موجهة فى الوضع القياسى، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة المعطاه فأوجد جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية فى الحالات الآتية:

أ (٣ا، -٤ا) حيث ا > ٠

ب $(\frac{٣}{٢}$ا، -٢ا) حيث $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

١١ اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية:

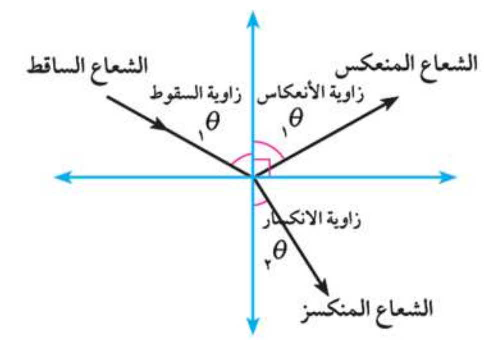
أ جا ٢٤٠° ب ظا ٣٦٥° ج قتا ٤١٠°

د ظتا $\frac{٩\pi}{٤}$ هـ قا - $\frac{٩\pi}{٤}$ و ظا $\frac{-٢٠\pi}{٩}$

١٢ أوجد قيمة ما يأتى:

أ جتا $\frac{\pi}{٢}$ × جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ × جا $\frac{\pi}{٢}$

ب ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° + جتا² ٩٠°



١٣ الربط بالفيزياء: عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور:

إذا كان جا $\theta_١$ = ك جا$\theta_٢$، كانت ك = $\sqrt{٣}$، $\theta_١$ = ٦٠°

فأوجد قياس زاوية $\theta_٢$. ....

١٤ اكتشف الخطأ: طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ جا ٤٥°.

إجابة كريم

٢ جا ٤٥° = جا ٢ × ٤٥°

= جا ٩٠° = ١

إجابة أحمد

٢ جا ٤٥ = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

= $\sqrt{٢}$

أى الإجابتين صحيح؟ولماذا؟

١٥ تفكير ناقد: إذا كانت θ قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث ظتا θ = - ١، قتا θ = $\sqrt{٢}$. هل من الممكن أن يكون θ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ؟ فسر إجابتك.

٤ - ٤

الزاويا المنتسبة

Related Angles

سوف تتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ١٨٠° $\pm \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٣٦٠° $- \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٩٠° $\pm \theta$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، ٢٧٠° $\pm \theta$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة:
  - جا α = جتا β
  - قا α = قتا β
  - طا α = ظتا β

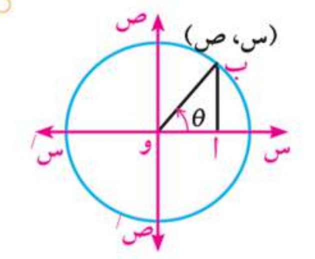
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاويتان منتسبتان Related Angles

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

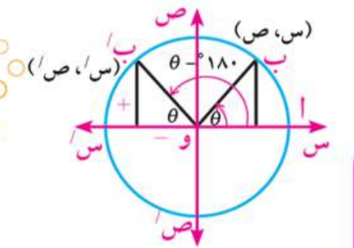


سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه.
يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ و ب في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص). قياسها θ حيث ٠° < θ < ٩٠°

عيِّن النقطة ب/ صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.

ما قياس ∠ أ و ب/؟ هل ∠ أ و ب/ في الوضع القياسى؟

١ - الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (١٨٠° - θ)



من الشكل المقابل ب/ (س/، ص/) صورة النقطة ب(س،ص) بالانعكاس حول محور الصادات فيكون س/ = -س ، ص/ = -ص
لذلك فإن:

جا (١٨٠° - θ) = جا θ	قتا (١٨٠° - θ) = قتا θ
جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ	قا (١٨٠° - θ) = - قا θ
ظا (١٨٠° - θ) = - ظا θ	ظتا (١٨٠° - θ) = - ظتا θ

فمثلًا: جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° - ٦٠°) = - جتا ٦٠° = $-\frac{1}{2}$

جا ١٣٥° = جا (١٨٠° - ٤٥°) = جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

حاول أن تحل

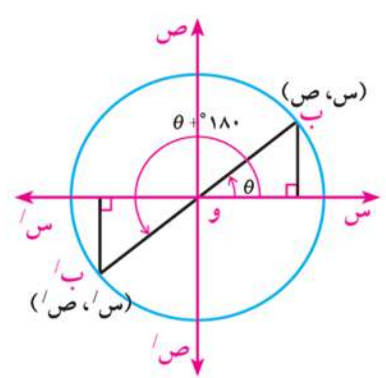
١) أوجد ظا ١٣٥° ، جا ١٢٠° ، جتا ١٥٠°

لاحظ أن: θ + (١٨٠° - θ) = ١٨٠°

يقال إن الزاويتين θ ، ١٨٠° - θ **زاويتان منتسبتان**.

> **تعريف** **الزاويتان المنتسبتان:** هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيح من القوائم.

٢- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(180° + \theta)$



في الشكل المقابل نجد:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و فيكون س/ = −س، ص/ = −ص

لذلك فإن:

جا $(180° + \theta)$ = − جا θ	قتا $(180° + \theta)$ = − قتا θ
جتا $(180° + \theta)$ = − جتا θ	قا $(180° + \theta)$ = − قا θ
ظا $(180° + \theta)$ = ظا θ	ظتا $(180° + \theta)$ = ظتا θ

فمثلًا:

جا ٢١٠° = جا (١٨٠° + ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{1}{2}$

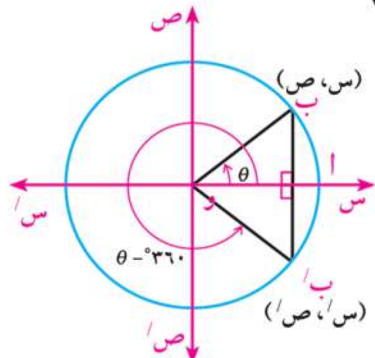
جتا ٢٢٥° = جتا (١٨٠° + ٤٥°) = − جتا ٤٥° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد جا ٢٢٥° ، جتا ٢١٠° ، قا ٦٠٠° ، ظتا ٢٢٥°.

٣- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(360° - \theta)$



في الشكل المقابل:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص)

بالانعكاس حول محور السينات فيكون س/ = س ، ص/ = −ص

لذلك فإن:

جا $(360° - \theta)$ = − جا θ	قتا $(360° - \theta)$ = − قتا θ
جتا $(360° - \theta)$ = جتا θ	قا $(360° - \theta)$ = قا θ
ظا $(360° - \theta)$ = − ظا θ	ظتا $(360° - \theta)$ = − ظتا θ

فمثلًا:

جا ٣٣٠° = جا (٣٦٠° − ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{1}{2}$

جتا ٣١٥° = جتا (٣٦٠° − ٤٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

لاحظ أن

الدوال المثلثية للزاوية $(-\theta)$ هى نفسها الدوال المثلثية للزاوية $(360° - \theta)$

حاول أن تحل

(٣) أوجد: جا ٣١٥° ، قتا ٣١٥° ، ظا ٣٣٠° ، ظا ٣٠٠°

تفكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (−٤٥°) ، جتا (−٦٠°) ، ظا(−٣٠°) ، جا ٦٩٠°.

مثال

(١) بدون استخدام الآله الحاسبة أوجد قيمة المقدار

جا ١٥٠° جتا (-٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا (-٣٠٠°) = جتا (-٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٩٣٠° = جتا (٩٣٠° - ٢ × ٣٦٠°) = جتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

وتكون جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = -جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظتا ٢٤٠° = ظتا (١٨٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\text{ظا ٦٠°}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن جا ٦٠٠° جتا (-٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (-٢٤٠°) = -١

٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، (٩٠° - θ)

يبين الشكل المجاور جزءًا من دائرة مركزها و.

الزاوية التى قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها نق.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و جـ ب/:

نجد أن: س/ = ص ، ص/ = س

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، (٩٠° - θ)

جا (٩٠° - θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° - θ) = قا θ

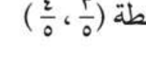
جتا (٩٠° - θ) = جا θ ، قا (٩٠° - θ) = قتا θ

ظا (٩٠° - θ) = ظتا θ ، ظتا (٩٠° - θ) = ظا θ

مثال

(١) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

فأوجد الدوال المثلثية: جا (٩٠° - θ) ، ظتا (٩٠° - θ)



الحل

$\because$ جا $(٩٠° - \theta)$ = جتا θ $\therefore$ جا $(٩٠° - \theta) = \frac{٣}{٥}$

$\because$ ظتا $(٩٠° - \theta)$ = ظا θ $\therefore$ ظتا $(٩٠° - \theta) = \frac{٤}{٣}$

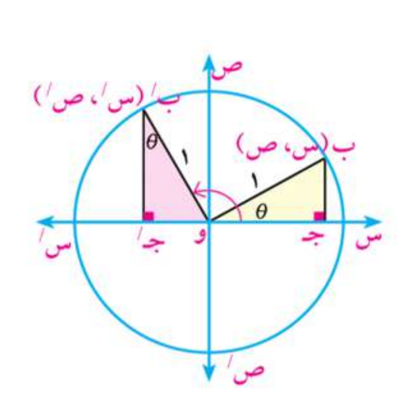
حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق أوجد جتا $(٩٠° - \theta)$ ، قتا $(٩٠° - \theta)$

٥- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(٩٠° + \theta)$

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

نجد أن ص/ = س ، س/ = −ص



ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتينθ ، $(٩٠° + \theta)$ كالآتى:

جا $(٩٠° + \theta)$ = جتا θ ، قتا $(٩٠° + \theta)$ = قا θ

جتا $(٩٠° + \theta)$ = −جا θ ، قا $(٩٠° + \theta)$ = −قتا θ

ظا $(٩٠° + \theta)$ = −ظتا θ ، ظتا $(٩٠° + \theta)$ = −ظا θ

مثال

(٢) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{١}{٣}، \frac{٢\sqrt{٢}}{٣})$

أوجد الدوال المثلثية ظا $(٩٠° + \theta)$ ، قتا $(٩٠° + \theta)$

الحل

$\because$ ظا $(٩٠° + \theta)$ = − ظتا θ $\therefore$ ظا $(٩٠° + \theta) = -\frac{١}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

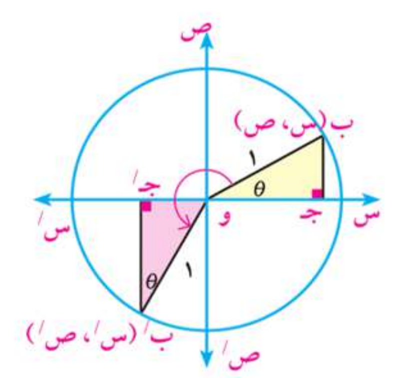
$\because$ قتا $(٩٠° + \theta)$ = قا θ $\therefore$ قتا $(٩٠° + \theta)$ = ٣

حاول أن تحل

(٦) فى المثال السابق أوجد: جا $(٩٠° + \theta)$ ، قا $(٩٠° + \theta)$

٦- الدوال المثلثية لأى لزاويتين قياسيهما θ ، $(270^\circ - \theta)$

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ، $(270^\circ - \theta)$ كالآتى:

جا $(270^\circ - \theta)$ = − جتا θ ، قتا $(270^\circ - \theta)$ = − قا θ

جتا $(270^\circ - \theta)$ = − جا θ ، قا $(270^\circ - \theta)$ = − قتا θ

ظا $(270^\circ - \theta)$ = ظتا θ ، ظتا $(270^\circ - \theta)$ = ظا θ

مثال

③ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{1}{2}، \frac{\sqrt{3}}{2})$ فأوجد الدوال المثلثية: جتا $(270^\circ - \theta)$ ، ظتا $(270^\circ - \theta)$

الحل

∵ جتا $(270^\circ - \theta)$ = − جا θ ∴ جتا $(270^\circ - \theta) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

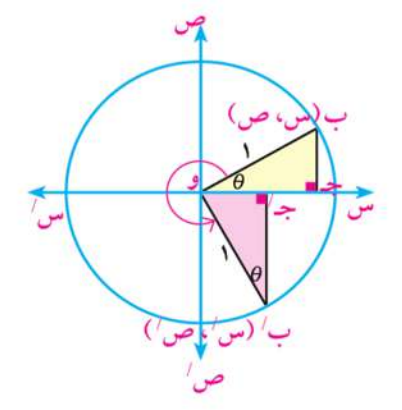
∵ ظتا $(270^\circ - \theta)$ = ظا θ ∴ ظتا $(270^\circ - \theta) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

حاول أن تحل

⑦ فى المثال السابق أوجد ظا $(270^\circ - \theta)$، قتا $(270^\circ - \theta)$

٧- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(270^\circ + \theta)$

من تطابق المثلثين: ب/ جـ/ و، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(270^\circ + \theta)$ كالآتى:

جا $(270^\circ + \theta)$ = − جتا θ ، قتا $(270^\circ + \theta)$ = − قا θ

جتا $(270^\circ + \theta)$ = جا θ ، قا $(270^\circ + \theta)$ = قتا θ

ظا $(270^\circ + \theta)$ = − ظتا θ ، ظتا $(270^\circ + \theta)$ = − ظا θ

مثال

④ إذا كانت الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{2}{3}، \frac{\sqrt{5}}{3})$ فأوجد الدوال المثلثية: جا $(270^\circ + \theta)$ ، قا $(270^\circ + \theta)$

الحل

$\because$ جا $(٢٧٠° + \theta)$ = − جتا θ $\therefore$ جا $(٢٧٠° + \theta)$ $= -\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

$\because$ قا $(٢٧٠° + \theta)$ = قتا θ $\therefore$ قا $(٢٧٠° + \theta)$ $= \frac{٣}{٢}$

حاول أن تحل

٨ فى المثال السابق أوجد ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ ، قتا $(٢٧٠° + \theta)$.

الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة: (جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β)

General solution of trigonometric equations as the form [tan(α) = cot(β), sec(α) = cscb(β), sin(α) = cos(β)]



سبق أن درست أنه إذا كان α، β هما قياسا زاويتين متتامتين (أى مجموع قياسيهما ٩٠°) فإن جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β ومن ذلك فإن $\alpha + \beta = ٩٠°$ حيث α، β زاويتان حادتان فإذا كانت جا θ = جتا ١٥° فما هى قيم زاوية θ المتوقعة؟



١- إذا كان جا α = جتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- جا α = جا $(\frac{\pi}{٢} + \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} + \beta$ أى $\alpha - \beta = \frac{\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن $\in$ ص) إلى الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ فإن:

عندما جا α = جتا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)، بالمثل:

عندما قتا α = قا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)، $\alpha \neq$ ن π ، $\beta \neq (٢ن + ١)\frac{\pi}{٢}$

٢- إذا كان ظا α = ظتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن :

- ظا α = ظا $(\frac{\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- ظا α = ظا $(\frac{٣\pi}{٢} - \beta)$ ومن ذلك فإن: $\alpha = \frac{٣\pi}{٢} - \beta$ أى $\alpha + \beta = \frac{٣\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن $\in$ص) إلى الزاويتين $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن:

عندما ظا α = ظتا β فإن $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ن

(حيث ن $\in$ ص)، $\alpha \neq (٢ن + ١)\frac{\pi}{٢}$ ، $\beta \neq$ ن π

مثال

(٥) حل المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

الحل

المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

$٢\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ (ن ∈ ص) من تعريف المعادلة

(١) إما $٢\theta + \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ أى أن: $٣\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

$\theta = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$ بقسمة الطرفين على ٣

(٢) أو $٢\theta - \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ أى أن: $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حل المعادلة هو: $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$ أو $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حاول أن تحل

(٩) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ) جا ٤ θ = جتا ٢ θ ب) ٢جا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = ١ ج) جتاه θ = جا θ

(١٠) **اكتشف الخطأ:** فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة جا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

إجابة كريم

جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $(٢\pi + \theta - \frac{\pi}{٢})$

= جا $(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)$

= − جتا θ

إجابة زياد

جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $[-(\frac{\pi}{٢} - \theta)]$

= −جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

= −(− جتا θ) = جتا θ

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم θ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[والتى تحقق كل من المعادلات الآتية :

أ) جا θ − جتا θ =٠ ب) قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦})$ = قاθ ج) ٢جتا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = ١

تمــــارين ٤ – ٤

أولًا: أكمل ما يأتى:

(١) جتا $(١٨٠° + \theta)$ = ...

(٢) ظا $(١٨٠° - \theta)$ = ...

(٣) قتا $(٣٦٠° - \theta)$ = ...

(٤) جا $(٣٦٠° + \theta)$ = ...

(٥) جا $(٩٠° + \theta)$ = ...

(٦) ظتا $(٩٠° - \theta)$ = ...

(٧) قا $(٢٧٠° + \theta)$ = ...

(٨) جتا $(٢٧٠° - \theta)$ = ...

ثانيًا: أكمل كلًا مما يأتى بقياس زاوية حادة

(٩) جا ٢٥° = جتا ....°

(١٠) جتا ٦٧° = جا ....°

(١١) ظا ٤٢° = ظتا ....°

(١٢) قتا ١٣° = قا ....°

(١٣) إذا كان ظتا٢θ = طاθ حيث $٠° < \theta < ٩٠°$ فإن ق$(\angle \theta)$= ....

(١٤) إذا كان جا ٥θ = جتا٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = ...°

(١٥) إذا كان قا θ = قا$(٩٠° - \theta)$ فإن ظتا θ = ...

(١٦) إذا كان ظا ٢θ = ظتا٣θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن ق$(\angle \theta)$= = ...ء

(١٧) إذا كان جتا θ = جا٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا٣θ = ...

ثالثًا: الاختيار من متعدد:

(١٨) إذا كانت ظا $(١٨٠° + \theta)$ = ١ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوى

أ ٤٥° ب ٣٠° ج ٦٠° د ١٣٥°

(١٩) إذا كان جتا ٢θ = جاθ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن جتا ٢θ تساوى

أ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د ١

(٢٠) إذا كان جا α = جتا β، حيث α، β زاويتان حادتان فإن ظا$(\alpha + \beta)$ تساوى

أ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ب ١ ج $\sqrt{٣}$ د غير معروف

(٢١) إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا$(٩٠° - ٣\theta)$ تساوى

أ −١ ب $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج ١ د $\sqrt{٣}$

(٢٢) إذا كان جتا$(٩٠° + \theta)$ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوى

أ ١٥٠° ب ٢١٠° ج ٢٤٠° د ٣٣٠°

رابعًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(٢٣) أوجد إحدى قيم θ حيث $٠ \leqslant \theta < ٩٠°$ التى تحقق كلًّا من الآتى:

أ) جا($٣\theta + ١٥°$) = جتا($٢\theta - ٥°$) ....

ب) قا($\theta + ٢٥°$) = قتا($\theta + ١٥°$) ....

جـ) ظا($\theta + ٢٠°$) = ظتا ($٣\theta + ٣٠°$) ....

د) جتا $\frac{\theta + ٢٠°}{٢}$ = جا $\frac{\theta + ٤٠°}{٢}$ ....

(٢٤) أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ) جا ١٥٠° ب) قتا ٢٢٥ جـ) قا ٣٠٠° د) ظا ٧٨٠°

هـ) قتا $\frac{١١\pi}{٦}$ و) جا $\frac{٧\pi}{٤}$ ز) ظتا $\frac{-٢\pi}{٣}$ ح) جتا $\frac{-٧\pi}{٤}$

(٢٥) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ والمرسومة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $(-\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$ فأوجد:

أ) جا($١٨٠° + \theta$) ب) جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

جـ) ظا ($٣٦٠° - \theta$) د) قتا $(\frac{٣\pi}{٢} - \theta)$

(٢٦) اكتشف الخطأ: جميع الإجابات التالية صحيحة ماعدا إجابة واحدة فقط خطأ، فما هى:

١- جتا θ تساوى ....

أ) جا ($\theta - ٢٧٠°$) ب) جا ($٢٧٠° - \theta$) جـ) جتا ($٣٦٠° - \theta$) د) جتا ($٣٦٠° + \theta$)

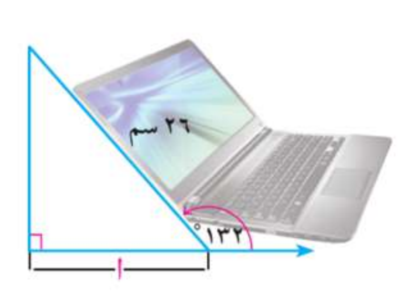
٢- جا θ تساوى ....

أ) جتا ($\frac{\pi}{٢} - \theta$) ب) جا ($\pi - \theta$) جـ) جتا ($\frac{٣\pi}{٢} + \theta$) د) جا ($\frac{\pi}{٢} + \theta$)

٣- ظا θ تساوى ....

أ) ظتا ($٩٠° - \theta$) ب) ظتا ($٢٧٠° - \theta$) جـ) ظا ($٢٧٠° - \theta$) د) ظا ($١٨٠° + \theta$)

٢٧ **الربط بالتكنولوجيا:** عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كانت زاوية ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل.



أ) ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى، بحيث تكون الزاوية ١٣٢° فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

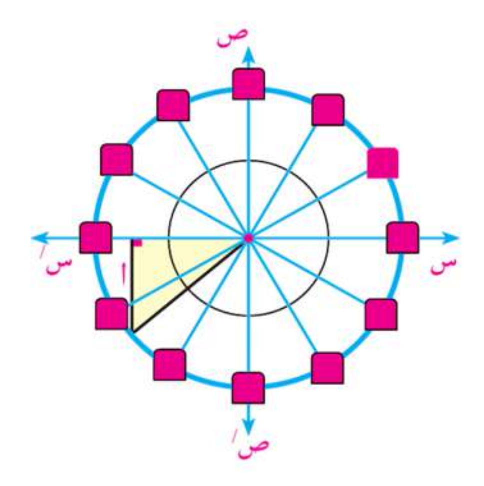
....

....

ب) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم أ، ثم أوجد قيمة أ لأقرب سنتيمتر.

....

ألعاب: تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ نصف قطره ١٢ مترًا، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى $\frac{5\pi}{4}$.



أ) ارسم الزاوية التى قياسها $\frac{5\pi}{4}$ فى الوضع القياسى.

....

....

ب) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة أ ثم أوجد قيمة أ بالمتر لأقرب رقمين عشريين.

....

٢٨ **تفكير ناقد:**

أ) إذا كان θ قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث ظتا θ = -١ ، قتا θ = $\sqrt{2}$. فهل يمكن أن يكون ق ($\angle\theta$) = $\frac{3\pi}{4}$؟ فسر إجابتك؟

....

ب) إذا كان جتا $(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا $(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{1}{2}$ فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ.

....

٤ - ٥

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

Graphing Trigonometric Functions

سوف تتعلم

سوف تتعلم :
- رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
- رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.

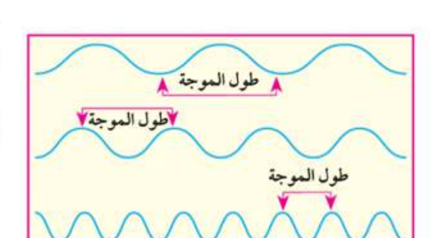
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- قيمة عظمى Maximum Value
- قيمة صغرى Minimum Value

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى
- برامج رسومية

فكر و ناقش



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف فى طول الموجة. كما تستخدم فى التصوير الطبى، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل فى أعماق المحيطات .وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:

التمثيل البيانى لدالة الجيب Represent sine function graphically

عمل تعاونى

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

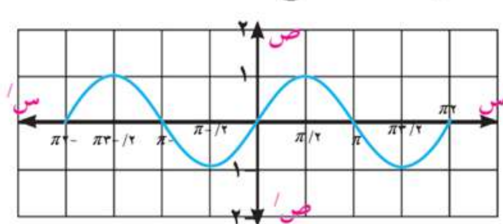
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جا θ	٠	٠,٥							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولا آخر مستخدما قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عُظمى أو قيم صُغرى لهذا المنحنى. فسِّر إجابتك؟



خواص دالة الجيب — Properties of the sine function

فى الدالة د حيث د(θ) = جا θ فإن:

★ مجال دالة الجيب هو]- ∞، ∞[، ومداها [- ١، ١]

★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة ٢π أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠،٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة، ٦π وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى -١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ ن ∈ ص

التمثيل البيانى لدالة جيب التمام — Represent cosine function graphically



١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

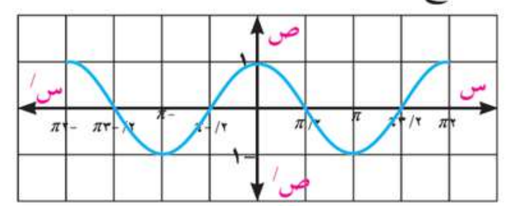
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جتا θ	١	٠,٨							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولًا آخر مستخدمًا قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حَصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.





خواص دالة جيب التمام — Properties of cosine function

في الدالة د حيث د(θ) = جتا θ فإن:

★ مجال دالة جيب التمام هو]-∞، ∞[، ومداها [-١، ١]

★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة٢π، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، ٢π] إلى اليمين أو اليسار ٢π وحدة، ٤π وحدة ، ٦π وحدة ، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوى ١وتحدث عند النقاط θ = ±٢ نπ ن ∈ ص

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوى - ١ وتحدث عند النقاط θ = π ± ٢πن ن ∈ ص

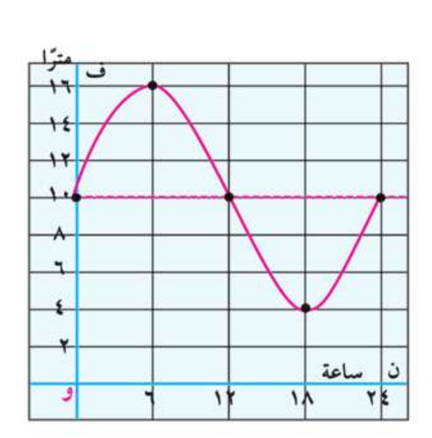
مثال

(١) **الربط بالفيزياء:** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.
ارسم مخططًا بيانيًّا يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هى

من العلاقة: ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠



عندما ن = ٠ ف = ٦ جا (١٥ × ٠)° + ١٠ = ٦ جا ٠ + ١٠ = ١٠

عندما ن = ٦ ف = ٦ جا (١٥ × ٦)° + ١٠ = ٦ جا ٩٠° + ١٠ = ١٦

عندما ن = ١٢ ف = ٦ جا (١٥ × ١٢)° + ١٠ = ٦ جا ١٨٠° + ١٠ = ١٠

عندما ن = ١٨ ف = ٦ جا (١٥ × ١٨)° + ١٠ = ٦ جا ٢٧٠° + ١٠ = ٤

عندما ن = ٢٤ ف = ٦ جا (١٥ × ٢٤)° + ١٠ = ٦ جا ٣٦٠° + ١٠ = ١٠

ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار

عندما ن = ٠، ١٢، ٢٤ ساعة

حاول أن تحل

(١) في المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

تحقق من فهمك

(١) ارسم منحنى الدالة ص = ٣جاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

(٢) ارسم منحنى الدالة ص = ٢جتاس حيث س ∈ [٠، ٢π]



أولًا: أكمل ماياتى:

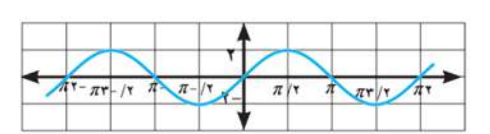
(١) مدى الدالة د حيث د(θ) = جاθ هو ....

(٢) مدى الدالة د حيث د(θ) = ٢ جاθ هو ....

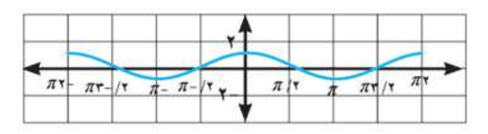
(٣) القيمة العظمى للدالة ع حيث ع(θ) = ٤جاθ هى ....

(٤) القيمة الصغرى للدالة هـ حيث هـ(θ) = ٣جتاθ هى ....

ثانيًا: اكتب قاعدة كل دالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها.



شكل (١) القاعدة هى:



شكل (٢) القاعدة هي:

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية :

أ) ص = جاθ

....

ب) ص = ٣ جتاθ

....

جـ) ص = $\frac{٣}{٢}$ جاθ

....

(٦) مثل كل من الدوال ص = ٤ جتاθ ، ص = ٣ جاθ باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد :

أ) مدى الدالة. .... ب) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة. ....

٤ - ٦

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Trigonometric Ratios

سوف تتعلم

- إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية. Trigonometric Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

علمت أنه إذا كانت ص = جا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص بمعلومية الزاوية θ، وعندما تعطى قيمة ص فهل يمكنك إيجاد قيمة θ ؟



إذا كانت ص = جا θ

فإنه يمكن إيجاد قيم θ إذا علمت قيمة ص.

مثال

① أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

أ جا θ = ٠,٦٣٢٥ ب ظتا θ = (- ١,٦٢٠٤)

الحل

أ ∵ جيب الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ ← SHIFT sin⁻¹ 0 . 6 3 2 5 = °'''

الربع الأول: θ = ٦ً ١٤َ ٣٩°

الربع الثانى: θ = ١٨٠° - ٦ً ١٤َ ٣٩° = ٥٤ً ٤٥َ ١٤٠°

ب ∵ ظل تمام الزاوية < ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ ← SHIFT tan⁻¹ 1 . 6 2 0 4 x⁻¹ = °'''

الربع الثانى: θ = ١٨٠° - ٤٨ً ٤٠َ ٣١° = ١٢ً ١٩َ ١٤٨°

الربع الرابع: θ = ٣٦٠° - ٤٨ً ٤٠َ ٣١° = ١٢ً ١٩َ ٣٢٨°

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

حاول أن تحل

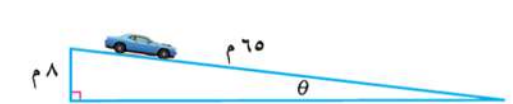
(١) أوجد θ حيث ٠ < θ < ٣٦٠° والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

أ) جتا θ = ٠,٦٢٠٥   ب) ظا θ = (- ٢,٣٦١٥)   جـ) قتا θ = (- ٢,١٠٣٦)

تحقق من فهمك

(١) **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات. لأقرب جزء من ألف.

(٢) **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ . أوجد θ بالتقدير الستينى.



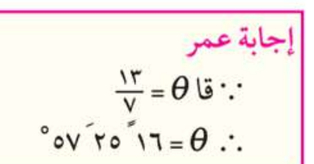
(٣) **اكتشف الخطأ:** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا، بحيث تأخذ الشكل المجاور، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هى الزاوية التى يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد θ بالتقدير الستينى.



إجابة كريم

$\because$ قتا $\theta = \frac{١٣}{٧}$

$\therefore \theta$ = ٣٢° ٣٤َ ٤٤ً



إجابة عمر

$\because$ قا $\theta = \frac{١٣}{٧}$

$\therefore \theta$ = ٥٧° ٢٥َ ١٦ً

(٤) **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب (٧، ٣) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{أب}$ ومحور السينات.

تمـــارين ٤ – ٦

أولًا: الاختيار من متعدد:

① إذا كان جا θ = ٠,٤٣٢٥ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ق $\angle$ (θ) تساوى

أ ٢٥,٦٢٦° ب ٦٤,٣٤٧° ج ٣٢,٣٨٨° د ٤٦,٣١٦°

② إذا كان ظا θ = ١,٨ وكانت ٩٠° $\leqslant \theta \leqslant$ ٣٦٠° فإن ق $\angle$ (θ) تساوى

أ ٦٠,٩٤٥° ب ١١٩,٠٥٥° ج ٢٤٠,٩٤٥° د ٢٩٩,٠٥٥°

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

① إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من جتا θ، جا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ ب ب $(\frac{١}{\sqrt{٢}}، -\frac{١}{\sqrt{٢}})$ ج ب $(-\frac{٦}{١٠}، \frac{٨}{١٠})$

....

....

② إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من قا θ، قتا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$ ب ب $(-\frac{١}{\sqrt{٥}}، -\frac{٢}{\sqrt{٥}})$ ج ب $(-\frac{٥}{١٣}، -\frac{١٢}{١٣})$

....

....

③ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلًّا من ظا θ، ظتا θ فى الحالات الآتية:

أ ب $(\frac{١}{\sqrt{١٠}}، -\frac{٣}{\sqrt{١٠}})$ ب ب $(\frac{٣}{\sqrt{٣٤}}، -\frac{٥}{\sqrt{٣٤}})$ ج ب $(-\frac{٤}{٥}، -\frac{٣}{٥})$

....

....

④ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب فأوجد: ق($\angle\theta$) حيث ٠° $< \theta <$ ٣٦٠° عندما:

أ ب $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$ ب ب $(-\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ج ب $(\frac{٦}{١٠}، \frac{-٨}{١٠})$

....

٥ أوجد بالقياس الستينى أصغر زاوية موجبة تحقق كلًّا من:

أ جا$^{-1}$ ٠,٦ ب جتا$^{-1}$ ٠,٤٣٦ ج ظا$^{-1}$ ١,٤٥٥٢

د قا$^{-1}$ (- ٢,٢٣٦٤) هـ ظتا$^{-1}$ ٣,٦٢١٨ و قتا$^{-1}$ (-١,٦٠٠٤)

٦ إذا كانت ٠° $\leqslant \theta \leqslant$ ٣٦٠° فأوجد قياس زاوية θ لكل مما يأتى:

أ جا$^{-1}$ (٠,٢٣٥٦) ب جتا$^{-1}$ (- ٠,٦٤٢) ج ظا$^{-1}$ (- ٢,١٤٥٦)

٧ إذا كان جا $\theta = \frac{1}{3}$ وكانت ٩٠° $\leqslant \theta \leqslant$ ١٨٠°

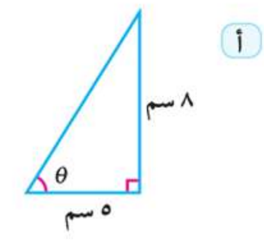
أ احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية

ب أوجد قيمة كلٍّ من: جتاθ ، ظاθ ، قاθ .

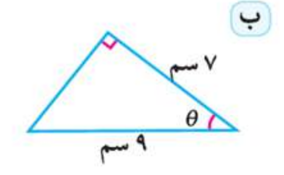
٨ سلالم: سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٣ أمتار فأوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقى.

٩ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية:

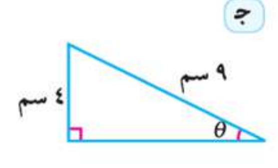
أ



ب

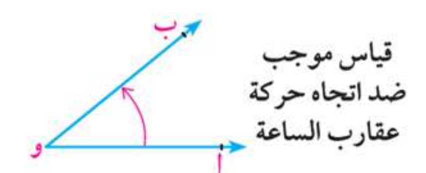


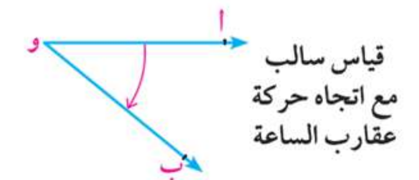
ج



ملخص الوحدة

١ الزاوية الموجهة: هى زوج مرتب من شعاعين ($\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$) هما ضلعا الزاوية، لهما نقطةبداية واحدة هى رأس الزاوية، ويسمى $\overrightarrow{و أ}$ الضلع الابتدائى، $\overrightarrow{و ب}$ الضلع النهائي للزاوية:





٢ الوضع القياسى للزاوية: فى نظام إحداثى متعامد تكون رأس الزاوية هى نقطة الأصل، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحورالسينات .

٣ الزوايا المتكافئة: هى الزوايا التى قياساتها على الصورة (θ + ن × ٣٦٠°) حيث ن ∈ ص يكون لها نفس الضلع النهائى.

٤ الزاوية النصف قطرية: هى الزاوية المركزية فى الدائرة وتقابل قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر الدائرة.

٥ العلاقة بين القياس الستينى والدائرى: إذا كانت لدينا زاوية قياسها الستينى يساوى س° وقياسها الدائرى يساوى $\theta^{ء}$ فإن:

$\theta^{ء}$ = س° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ، س° = $\theta^{ء}$ × $\frac{١٨٠°}{\pi}$

٦ طول القوس: إذا كان $\theta^{ء}$ هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها نق تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن: ل = $\theta^{ء}$ × نق

٧ الزاوية الربعية: هي زاوية في الوضع القياسى، بحيث يقع ضلعها النهائى على أحد المحورين س أو ص.

٨ دائرة الوحدة: هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثى، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

٩ النسبة المثلثية: هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

١٠ اشارات الدوال المثلثية:

لاحظ أن:

الربع الأول:	الربع الثانى:	الربع الثالث:	الربع الرابع:
٠° < θ < ٩٠°	٩٠° < θ < ١٨٠°	١٨٠° < θ < ٢٧٠°	٢٧٠° < θ < ٣٦٠°
كل الدوال المثلية موجبة	جا θ، قتا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	ظا θ، ظتا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	جتا θ، قا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.

١١ الدوال المثلثية للزوايا التى قياساتها:

أولاً: (١٨٠° − θ)

جا (١٨٠° − θ) = جا θ ، قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ
جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ ، قا (١٨٠° − θ) = − قا θ
ظا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ ، ظتا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ

ثانيًا: (١٨٠° + θ)

جا (١٨٠° + θ) = − جا θ ، قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ
جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ ، قا (١٨٠° + θ) = − قا θ
ظا (١٨٠° + θ) = ظا θ ، ظتا (١٨٠° + θ) = ظتا θ

ثالثًا: (٣٦٠° − θ)

جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ ، قتا (٣٦٠° − θ) = − قتا θ
جتا (٣٦٠° − θ) = جتا θ ، قا (٣٦٠° − θ) = قا θ
ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ ، ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ

رابعًا: (٩٠° − θ)

جا (٩٠° − θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° − θ) = قا θ
جتا (٩٠° − θ) = جا θ ، قا (٩٠° − θ) = قتا θ
ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٩٠° − θ) = ظا θ

خامسًا: (٩٠° + θ)

جا (٩٠° + θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° + θ) = قا θ
جتا (٩٠° + θ) = − جا θ ، قا (٩٠° + θ) = − قتا θ
ظا (٩٠° + θ) = − ظتا θ ، ظتا (٩٠° + θ) = − ظا θ

سادسًا: (٢٧٠° − θ)

جا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ ، قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ
جتا (٢٧٠° − θ) = − جا θ ، قا (٢٧٠° − θ) = − قتا θ
ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° − θ) = ظا θ

سابعًا: (٢٧٠° + θ)

جا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ ، قتا (٢٧٠° + θ) = − قا θ
جتا (٢٧٠° + θ) = جا θ ، قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ
ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° + θ) = − ظا θ

١٢ خواص كل من دالتى الجيب وجيب التمام

الخاصية	دالة الجيب د(θ) = جا θ	دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ
المجال والمدى	المجال هو]−∞، ∞[، المدى هو [−١، ١]	المجال هو]−∞، ∞[، المدى هو [−١، ١]
القيمة العظمى	تساوى ١ عند س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ن π ، ن ∈ ص	تساوى ١ عند س = ± ٢ ن π ، ن ∈ ص
القيمة الصغرى	تساوى −١ عند π = $\frac{3\pi}{2}$ + ٢ن π ، ن ∈ ص	تساوى −١ عند س = π ± ن π ، ن ∈ ص

١٣ إذا قطع الضلع النهائى للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسى دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) فإن س = جتا θ ، ص = جا θ وتعرف بالدوال الدائرية.

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:














اختبارات عامة

الاختبار الأول (الجبر وحساب المثلثات)

السؤال الأول : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان ل، م جذرى المعادلة س^٢ - ٧س + ٣ = ٠ فإن ل^٢ + م^٢ =

أ ٧ ب ٣ ج ٥٨ د ٧٩

(٢) إذا كانت حا θ = -١ ، حتا θ = ٠ فإن θ تساوى

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب π ج $\frac{٣\pi}{٢}$ د ٢π

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ - ٣ت ، ٢ + ٣ ت هى

أ س^٢ + ٤س + ١٣ = ٠ ب س^٢ - ٤س + ١٣ = ٠ ج س^٢ + ٤س -١٣ = ٠ د س^٢ - ٤س - ١٣ = ٠

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة س٢ - (م+٢) س+٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن م تساوى

أ ٣ ب ٢ ج -٢ د -٣

السؤال الثانى: أكمل

أ الدالة د : حيث د(س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة

ب الزاوية التى قياسها ٩٣٠ تقع فى الربع

ج إذا كان حتا θ = $\frac{١}{٢}$، حاθ = -$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن θ تساوى

د المعادلة التربيعية التى جذراها ضعف جذرى المعادلة ٢س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠ هى

السؤال الثالث:

أ ضع العدد $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ٢ت}$ فى صورة عدد مركب. حيث ت٢ = -١.

ب إذا كان ٤ جا أ - ٣ = ٠ أوجد ﻫ (∠أ) حيث أ ∈] ٠، $\frac{ط}{٢}$[

السؤال الرابع:

أ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د(س) = - س^٢ + ٨ س - ١٥

أولًا: ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١، ٧] **ثانيًا:** عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

ب إذا كان س = ٣ + ٢ت، ص = $\frac{٤ - ٢ت}{١ - ت}$ فأوجد س + ص فى صورة عدد مركب.

السؤال الخامس:

أ أوجد مجموعة حل المتباينة س٢ + ٣س - ٤ ≥ ٠

ب إذا كان ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < ب < ٢٧٠° فأوجد قيمة: جتا (٣٦٠° - ب) - جتا (٩٠° - ب)

اختبارات عامة

الاختبار الثانى (الجبر وحساب المثلثات)

السؤال الأول: أكمل ما يأتى

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٣}$ = ...

(٢) إذا كان جذرا المعادلة س٢ – ٦س + ل = ٠ حقيقيان ومتساويان فإن ل = ...

(٣) إذا كان ٠° < θ < ٩٠° وكان جا٢θ = جتا ٣θ فإن ق ($\angle\theta$) ....

(٤) مدى الدالة د حيث د(θ) = $\frac{٣}{٢}$ جا θ هو ....

السؤال الثانى: أختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

(١) المعادلة: $س^٢$(س – ١) (س + ١) = ٠ من الدرجة:

أ الأولى   ب الثانية   جـ الثالثة   د الرابعة

(٢) إذا كان جذرا المعادلة س٢ + ٣س – م = ٠ حقيقيان ومختلفان فإن م تساوى:

أ ١   ب ٢   جـ ٣   د ٤

(٣) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى ١٨٠°(ن – ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإنقياس زاوية المثمن المنتظم بالقياس الدائرى تساوى:

أ $\frac{\pi}{٣}$ ب $\frac{\pi}{٢}$ جـ $\frac{٣\pi}{٤}$ د $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) إذا كان ٢جتا θ = $\sqrt{٣}$ ، π > θ > ٠ فإن ق($\angle\theta$) يساوى

أ $\frac{\pi}{٣}$ ب $\frac{٦\pi}{٧}$ ب $\frac{٤\pi}{٣}$ د $\frac{٧\pi}{٦}$

السؤال الثالث:

أ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة: ٤ك $س^٢$ + ٧ س + $ك^٢$ + ٤ = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

ب إذا كان جاθ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا(– ٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد ق($\angle\theta$).

السؤال الرابع:

أ **أولا:** أوجد قيمتى أ ، ب اللتين تحققان المعادلة: ١٢ + ٣ أ ت = ٤ب – ٢٧ ت

ثانيا: أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة: س (س + ١) – ٢ ≥ ٠

ب زاوية مركزية قياسها θ مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم وتحصر قوسا طوله ٢٦ سم. أوجد θ بالقياس الستينى.

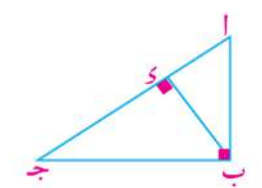
السؤال الخامس:

أ إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة حـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددا صحيحا متتاليا بدءا من العدد ١ يكون مجموعها مساويا ٢١٠

ب إذا كان جاس = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٩٠° < س < ١٨٠° فأوجد جا(١٨٠° – س) + ظا(٣٦٠° – س) + ٢ جا(٢٧٠° – س).

الاختبار الثالث (الهندسة)

السؤال الأول: أكمل ما يأتى



(١) المضلعان المشابهان لثالث يكونان ....

(٢) فى الشكل المقابل :

أولا: (أ ب)^٢ = أ ى × .... ، (جـ ب)^٢ = جـ أ × ....

ثانيا: ى أ × ى جـ = ...

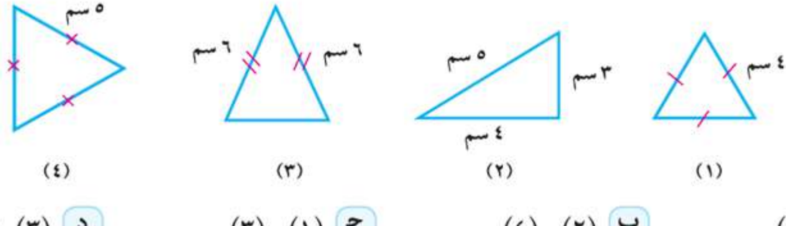
ثالثا: أ ب × ب جـ = ... × ....

السؤال الثانى: أختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم ، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى يساوى:

(أ) ١ : ٥ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

(٢) أى من المثلثين الآتيين متشابهين؟



(أ) (١) ، (٤) (ب) (٢) ، (٤) (جـ) (١) ، (٣) (د) (٣)، (٤)

(٣) إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين ١ : ٤ فإن النسبة ين مساحتى سطحيهما تساوى

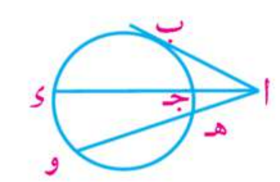
(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦

(٤) فى الشكل المقابل: كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحه ماعدا العبارة :

(أ) (أ ب)^٢ = أ جـ × أ ى (ب) (أ ب)^٢ = أ هـ × أ و

(جـ) أ جـ × أ ى = أ هـ × أ و (د) أ جـ × جـ ى = أ هـ × هـ و

السؤال الثالث :



(أ) فى الشكل المقابل: △ أ ى هـ ~ △ أ ب جـ أثبت أن : $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

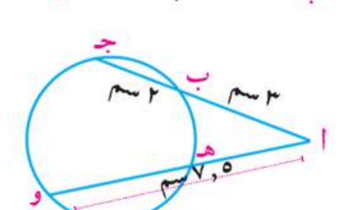
وإذا كان : أ ى = ٤ سم ، ى ب = ٢ سم ، هـ جـ = ١,٥ سم، ب جـ = ٥ سم.

أوجد طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ى هـ}}$

(ب) أ ب جـ مثلث، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ى = ٥ سم ، ى جـ = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أ هـ = ٢ سم ، جـ هـ = ٤سم.

أثبت أن △ ى هـ جـ ~ △ أ ب جـ ، ثم أوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما

السؤال الرابع :



(أ) فى الشكل المقابل: ق(∠ ا ى هـ) = ق(∠ جـ)

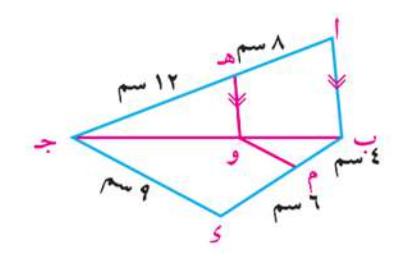
ا ى = ٤ سم ، ا هـ = ٥ سم ، ى هـ = ٦ سم ، هـ جـ = ٣ سم

أوجد طول كل من : ى ب، ب جـ

(ب) جـ ب ∩ و هـ = {ا}

اب = ٣ سم ، ب جـ = ٢ سم ، او = ٧,٥ سم

أوجد طول هـ و



السؤال الخامس :

(أ) ا ى متوسط فى المثلث ا ب جـ ، نصفت ∠ ا ى ب بمنصف قطع ا ب فى هـ ، نصفت ∠ ا ى جـ بمنصف قطع ا جـ فى و، رسم هـ و ، أثبت أن هـ و // ب جـ

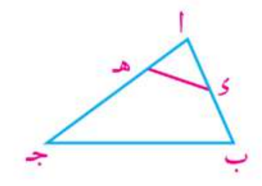
(ب) فى الشكل المقابل:

ا ب // هـ و ، ا هـ = ٨ سم، جـ هـ = ١٢ سم، جـ و = ٩ سم ،

ب م = ٤ سم ، ى م = ٦ سم

أولا: أوجد طول ب و

ثانيا: أثبت أن : و م // جـ ى



الاختبار الرابع (الهندسة)

السؤال الأول : أكمل ما يأتى

(١) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

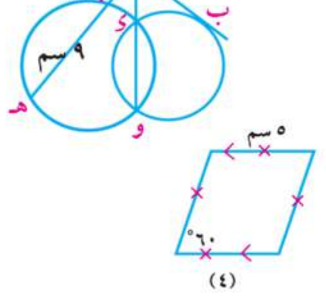
(٢) فى الشكل المقابل:

إذا كان المثلث △ ا ى هـ ~ △ ا جـ ب

فإن ق(∠ ا ى هـ) = ق(∠ ....)

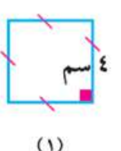
(٣) إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين ى هـ ، س ص فى نقطة ن فإن: ن ى . ن هـ = ...

(٤) فى الشكل المقابل: إذا كان ا جـ = ٣ سم ، جـ هـ = ٩ سم فإن اب = ...

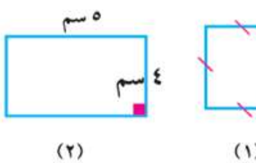


السؤال الثانى : أختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

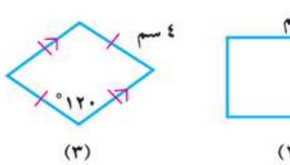
(١) أى من المضلعين الآتيين متشابهين؟



(١)



(٢)



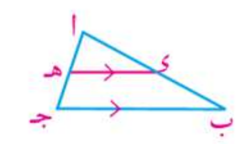
(٣)

(٤)

أ) المضلعان (١) ، (٢)   ب) المضلعان (١) ، (٣)   ج) المضلعان (٣) ، (٤)   د) المضلعان (٢) ،(٤)

٢) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى :

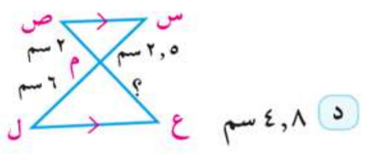
أ) ٢ : ٥   ب) ٤ : ٥   ج) ١٦ : ٢٥   د) ١٦ : ٤١



٣) **فى الشكل المقابل:** جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ماعدا التعبير :

أ) اى / ى ب = اهـ / هـ جـ   ب) اى / ى ب = ى هـ / ب جـ

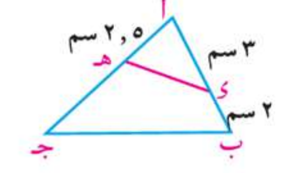
ج) اى / اب = اهـ / اجـ   د) اب / ب ى = اجـ / هـ جـ



٤) **فى الشكل المقابل:** طول م ع تساوى :

أ) ٣,٦ سم   ب) ٤ سم   ج) ٤,٢ سم   د) ٤,٨ سم

السؤال الثالث :



أ) **فى الشكل المقابل:** △ ا ب جـ ~ △ ا هـ ى

أثبت أن الشكل ب جـ هـ ى رباعى دائرى وإذا كان ا ى = ٣ سم ، ب ى = ٢ سم ، ا هـ = ٢,٥ سم . أوجد طول هـ جـ.

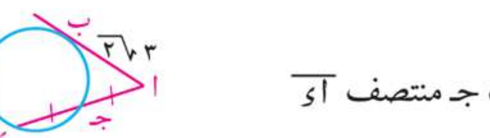
ب) ا ب جـ ى شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ . رسم هـ و // جـ ب ويقطع ا ب فى و رسم هـ م // جـ ى ويقطع ا ى فى م . أثبت أن و م // ب ى .

السؤال الرابع:

أ) **فى الشكل المقابل:** ق(∠ ب ا جـ) = ٩٠°، ا ى ⊥ ب جـ، اب = ٤,٥ سم، ا جـ = ٦ سم. أوجد طول كل من ب ى ، ى جـ ، ا ى

ب) ا ب جـ ى شكل رباعى فيه ب جـ = ٢٧ سم، ا ب = ١٢ سم ، ا ى = ٨ سم ، ى جـ = ١٢ سم، اجـ = ١٨ سم ، أثبت أن △ ب ا جـ ~ △ ا ى جـ وأوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما .

السؤال الخامس:



أ) **فى الشكل المقابل:** ا ب مماس للدائرة ، جـ منتصف ا ى

ا ب = ٣√٢ أوجد طول ا جـ

ب) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨ سم ، ا جـ = ١٢ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، ا ى ينصف ∠ ا ويقطع ب جـ فى ى، ثم رسم ى هـ // ب ا ويقطع ا جـ فى هـ ، أوجد طول كل من ب ى ، جـ هـ

المقاس	$\frac{1}{8}$ ٥٧ × ٨٢
عدد الصفحات بالغلاف	١٧٢ صفحة
ورق المتن	٧٠ جرام
ورق الغلاف	كوشيه ١٨٠ جم
ألوان المتن	٤ لــــون
ألوان الغلاف	٤ لــــون
رقم الكتـــــاب	٤١٢/١٠/٣/١١/١/٣٠

http://elearning.moe.gov.eg

